原著論文

Predicate Calculus for Boolean Valued Functions (15)

KOBAYASHI Shunichi

２値関数における述語論理（15）

小林　俊一

要　旨

２値関数と集合の分割に関する述語論理について成り立つ定理を、述語論理の新しい数学的モデルとして提案し、その定理の厳格な証明を行った。ここでの述語論理とは「すべての～について」や「ある～について」に関する一階述語論理を指す。述語論理や命題論理は、「数学の証明」を行う場合に、誰もが必ず利用してきているものである。すなわち、数学の証明問題を解く場合には自然に使っているのが述語論理や命題論理である。このような「数学の証明」の基礎をなすものとしての述語論理に関して研究を行った。従来の述語論理では提案されていなかった新しい定理を提案し、その定理の正しさを、数学証明検証システムMizarを利用して検証を行った。

キーワード

２値関数　　述語論理　　集合の分割

目　次

はじめに

本研究は、従来からある「命題論理」と「述語論理」の新しい数学的モデルを、コンピュータ時代に適した形で提案するものである。「2値関数」に「集合の分割」の考え方を導入することで「命題論理」と「述語論理」の新しい数学的モデルを作成している点に新規性がある。本論文では、「述語論理」の新しい数学的モデルの中で成り立つ新規の定理を提案するものである。本論文で提案する新規の定理は、従来の「述語論理」の世界では提案されていなかった新しい定理である。

ここで、命題論理とは「かつ（AND）」「または（OR）」「ならば」「でない（NOT）」などの関係を、論理記号を用いて論理積・論理和・含意・否定などにより記号化し、演算形式に表し、複合された命題を研究するものである。また、述語論理とは「全ての～」「ある～」などを、論理記号によって記号化して研究するものである。

具体例を挙げれば、命題論理としては、例えば「AならばB」「BならばC」が成り立つときに、「AならばC」が成り立つ（三段論法）というような例が挙げられる。また、述語論理としては、例えば、「全ての猫が餌を食べる」「タマは猫である」という2つが成り立つ場合には「タマは餌を食べる」ことが成り立つ、というような論理に関する例がある。日本においては小学校時代から、基礎教育として算数や数学を習ってきていると思う。こうした算数や数学の中では、証明問題を誰でも解いたことがあるはずである。ここで、「数学の証明」を行う場合には、実は命題論理や述語論理を利用してきている。すなわち、誰しも知らない間に「数学の証明」を行う場合に「命題論理」や「述語論理」を利用しているのである。

「数学の証明」は厳密性を保つため「一階述語論理」を使って行う。すなわち、数学の証明の根本をなすものとして、述語論理がある。数学的帰納法などのような論理演算がそれ自身を含むものは、「二階述語論理」と呼ばれている。

私が「命題論理」と「述語論理」に興味を持った理由は、「数学の証明」の基本とも言えるものである点にある。すなわち、もしも従来から正しいとされてきている「命題論理」や「述語論理」に誤りがあるようなことがあれば、すべての数学の証明が正しくないことになる可能性もあるからだ。これらの「命題論理」や「述語論理」が、微塵の誤りもなく正しいことを証明することができるのか実証してみたいと思って研究を進めてきた。

また、私が「命題論理」と「述語論理」に興味を持った理由のもう一つとしては、実はコンピュータの基本が、論理回路にある点が挙げられる。コンピュータの内部には、論理回路と呼ばれるものがある。コンピュータの論理回路によって、様々な計算や処理が行われ、インターネットに代表されるような便利な機能が実現されているのである。すなわち、コンピュータ内での演算の基本は、論理回路による論理演算である。ここで、論理演算とは、分かりやすく言えば、命題論理のAND、OR、NOTなどの演算を指す。

つまり、コンピュータの基本である論理回路における動作も論理演算であり、「命題論理」と「述語論理」の研究を進めることがコンピュータ内部の動作の正しさを保証することにもつながるのである。日常生活でコンピュータを使って便利に生活できるのは、コンピュータ内部の論理回路のおかげである。論理回路における動作を数学的に研究するものとして、「命題論理」と「述語論理」の研究を進めることには十分な意義があると思う。

本研究の研究分野は、「形式化数学」（Formalized Mathematics）と呼ばれる数学の研究領域である。「形式化数学」は、簡単に言えば従来からの紙ベースの数学に誤りがある可能性があるため、今までの全ての数学を含む、全ての数学における定理や定義を、コンピュータを用いて定式化し100パーセント正しい数学として、全ての数学を再構築し直す研究領域である。その目指すところは、数学をコンピュータ上で行うことで、一度証明した定理や定義を再利用可能にし、数学の証明をもっと簡単にできるようにしようとするものである。それにより、数学の発展を図るものである。「形式化数学」を研究領域とする学会がMizar学会であり、本論文はMizar学会の研究の仕方に従ったものである。

数学には様々な「定義」や「定理」がある。これらの数学の全ての「定義」や「定理」を、証明付きでコンピュータ言語化し、その正しさをコンピュータでチェックするのが「形式化数学」である。形式化数学の「形式化」とは数学の証明をコンピュータ言語化することである。数学をコンピュータ言語化する理由は、数学者でも間違いを犯すことが多々あるからである。世界的に有名な理論を書いた数学者の死後かなり経ってから、その理論の証明部分

に誤りが発見されるようなことがある。後世に名を残すような偉大な数学者であっても、人間である以上誤りは起こりえる。

数学を形式化する第二の理由は、非常に難解な数学の理論などの場合、それを理解できる人が少なく、理論の正しさを保証する手段がないためである。例えば、数学のノーベル賞と言われるフィールズ賞を受賞するような理論などの場合、それを理解出来るのは世界に10人いないと言われることもある。理解出来る人が世界に10人といない理論の正しさを、誰が保証してくれるのであろうか。偉大な数学者が証明したからといって、必ずしもそれが絶対に正しいとは限らないのである。正しさの厳密なチェックが必要である。

数学の世界では、誤った証明が発表されてしまうということがある。数学は最先端の科学技術を支える強力な基礎となるものである。コンピュータシステムなどは、巨大な数学の塊と言っても過言ではない。コンピュータシステムを支えている数学に、誤りがあったら、大変なことになるのは容易に想像できる。数学を形式化し、コンピュータという極めて厳格なものに数学の証明をチェックさせ、数学の正しさを保証することには十分な意義がある。「形式化数学」は、新しい発展途上の研究分野であるが、数学の世界では重要な研究分野として認められてきている。

本研究では、数学の証明の確からしさのチェックをコンピュータ上で行うソフトウェアを利用している。これらは、数学の証明の正しさをチェックするシステムということで、「プルーフチェッカー」と呼ばれている。「プルーフチェッカー」の中でも、特に有名なものはポーランドのワルシャワ大学のAndrzej Trybulec 教授を中心とした Mizarグループが開発したMizarシステム[16]があげられる。

「プルーフチェッカー」では、コンピュータに適した形の数学言語と呼ばれるものを利用する。数学言語は、コンピュータプログラムと、かなり類似性がある。すなわち、コンピュータプログラムを記述するように、数学言語を利用することで、数学の証明を記述していく。そして、数学言語で記述された数学の証明を、「プルーフチェッカー」を使うことで、その証明の全過程に全て誤りがないかをチェックすることが可能となる。ここで、「プルーフチェッカー」は証明の自動化でなく、証明の検証を行うだけのシステムである。

Mizarシステムのようなプルーフチェッカーでは、既に完全に正しいことが証明された数多くの定理などを、完全に正しいものとして簡単に部品のように利用することができる。これにより、複雑な数学の証明も、部品化された定理などを組み合わせることで簡単に証明することも可能になる。これは、ちょうど複雑なコンピュータプログラムを作成する場合に、必要なソフトウェア部品であるライブラリなどを利用することで、簡単に高度なソフトウェアが構築できるのと極めて似ている。

本論文で証明した定理は、従来からある「述語論理」を、「２値関数」と「集合の分割」の考え方を導入することによって、「述語論理」の新しい数学的なモデルとして構築し直したところに新規性がある。この新しく提案した数学的なモデルは、従来の「命題論理」と「述語論理」のアナロジー(同じ特徴を持つ別のもの)であると言える。この数学的なモデルは、従来の「命題論理」と「述語論理」の本質を、適切に表現できる点に特徴がある。

実際には、「命題論理」と「述語論理」の新しい数学的なモデルにおける定理を、既に数多く発表済みであり、本論文は、その続きの新しい定理を提案するものである。私が、これまで論文として作成した数学の証明は、全てMizarシステムの「数学言語」と「プルーフチェッカー」を利用して作成したものである。

Mizarシステムの「プルーフチェッカー」を利用することで、従来から正しいとされてきた「命題論理」や「述語論理」の定理の多くが、本当に厳格な形で100パーセント正しいと保証できるのかを検証してみたいと考えて研究を進めてきた。この研究を進めてきた結果、従来から正しいとされてきた「命題論理」と「述語論理」の数多くの定理が、提案している新しい数学モデルの中では、本当の意味で、微塵の誤りもなく正しいことが証明できることを明らかにすることができた。

本研究で提案する「命題論理」と「述語論理」の新しい数学的モデルの基礎的な定義や定理などについては、[2], [3], [4], [6]で既に発表済みである。また、従来の「述語論理」と、本研究で提案している「述語論理」の新しい数学的なモデルとの関係については、[1]の論文にて詳しく記述してある。[1]では、「２値関数」と「集合の分割」の説明も記載してある。

この[1]の論文では、図式化した形で詳細に説明をしてあるため、これをご覧頂けば、「述語論理」の新しい数学的なモデルが、どのようなものである

かを理解できると思う。なお、これらの論文は、インターネットから自由にダウンロード可能であり、そのアドレスも最後に一覧で示してある。さらに、参考までに**[2], [3], [4], [5]に、各論文のMizarシステムの数学言語で記述した証明の全容も、アドレスで示してある。**ここで、アドレスの最後がpdfになっているものが英語の論文であり、アドレスの最後がmizになっているものが、Mizarシステムの数学言語で記述した数学の証明である。**ここで示したMizar学会のホームページをご覧頂けば、[2], [3], [4], [5]の論文の証明の全てが見られる。**

ここでは理解を深めて頂くために、従来からの述語論理と、本研究で提案している新しい述語論理の数学的モデルについて、図式化した形で関係性を示してみる。なお、**これ以下の「はじめに」の内容は、[1]の英語論文の内容の一部をわかりやすく日本語化し、加筆したもの**である。詳しくは、論文[1]に記述してあるので、[1]を参照して頂きたい。**本論文のSection 2からが、本論文で提案している新しい定理の提案であり新規の内容である。**

まず、わかりやすくするため、従来の述語論理について具体例を挙げて考えてみる。例えば、2変数の述語論理について考える。具体的には、以下の式について考える。

“$\exists x \forall y P(x,y)=\mathrm{True} \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)=\mathrm{True}$.”

ここで、この式の意味を図式化してみる。

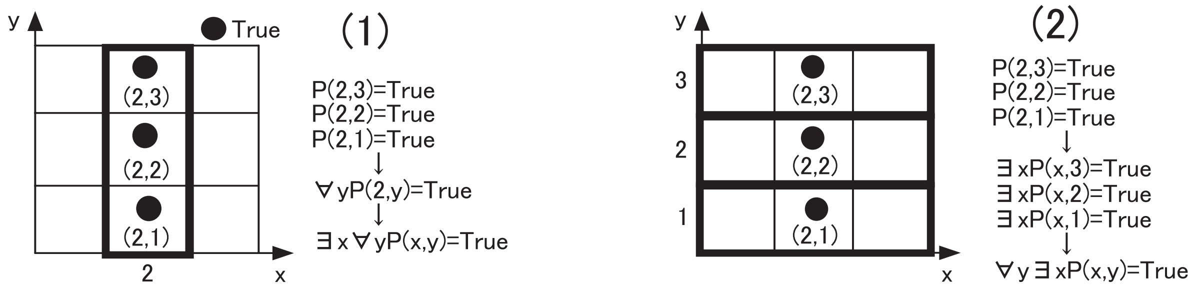

図 1.　従来の述語論理（1）

例えば、(2,3)の黒丸●は、”P(2,3)=True”を示している。図１(1)において、P(2,1)=True, P(2,2)=True, P(2,3)=True であるので、“∀yP(2,y)=True.”と書ける。この式は、「全てのyについて、P(2,y)=True となる」という意味である。その結果、“∃x∀yP(x,y)=True.”と書ける。この式は、「∀yP(x,y)=True となる x が存在する」という意味である。

同様に、図１(2)において、P(2,1)=True, P(2,2)=True, P(2,3)=True であるので、“∃xP(x,1)=True, ∃xP(x,2)=True, ∃xP(x,3)=True.”の３つの式が成り立つ。

この３つの式から、“∀y∃xP(x,y)=True.”となる。

この式は、「全てのyについて、∃xP(x,y)=True が成り立つ」という意味である。

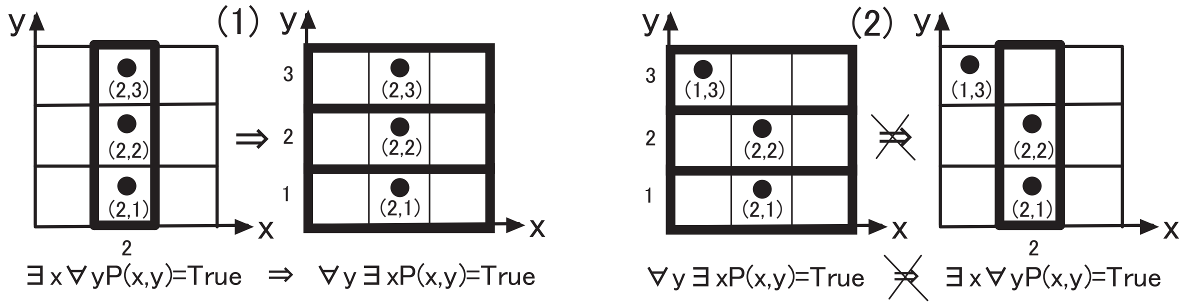

図 2.　従来の述語論理（2）

図 2(1)より、直感的にも“∃x∀yP(x,y)=True ⇒∀y∃xP(x,y)=True.”が成り立つことが分かる。この式の意味は、「もし、∃x∀yP(x,y)=True が成り立つならば、∀y∃xP(x,y)=True が成り立つ」という意味である。

しかし、図 2(2)より、“∀y∃xP(x,y)=True ⇒ ∃x∀yP(x,y)=True” は、**成り立たない**ことは明らかである。「⇒」の記号は、「～ならば～」を意味している。

本研究では、「集合の分割」を利用する。ここで、Y を空でない集合とする。本論文では、PA、PB を集合 Y の分割とする。

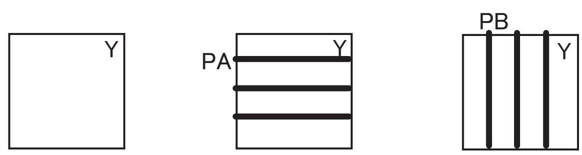

図 3.　集合 Y と、集合 Y の分割 PA、集合 Y の分割 PB

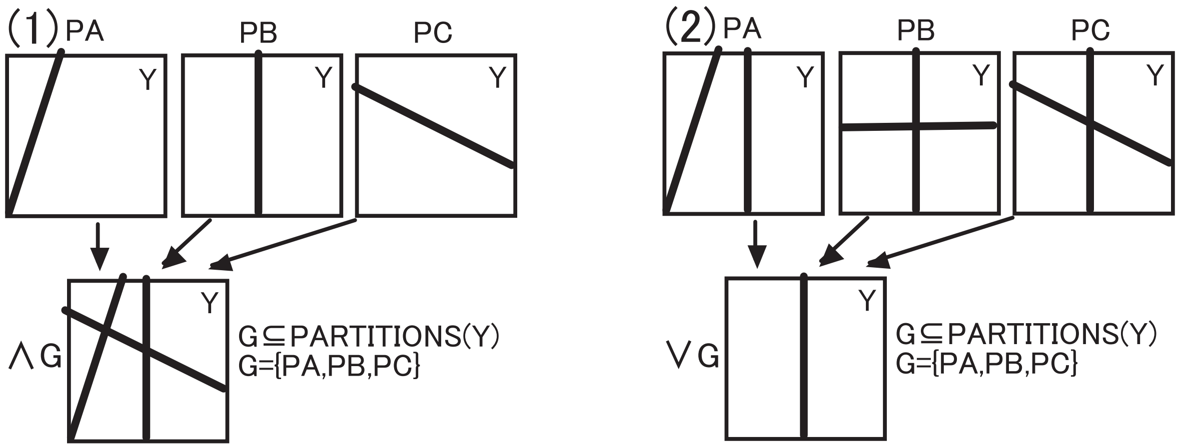

図 4.　分割の Union と Intersection

次に、集合の分割の Union と Intersection を定義する。図 4(1)のように、集合 Y の分割 PA, PB, PC の３つの分割がある場合、Union は、３つの分割を全て含む分割である。また、図 4(2)のように、集合 Y の分割 PA, PB, PC の３つの分割がある場合、それぞれの集合の分割に共通する分割が Intersection である。

分割、Union、Intersection の定義は、以下の通りである。

分割の定義　　∀x: x∈PARTITIONS(Y) ⇔ x is a partition of Y

Union の定義　　∀x: x∈∧G ⇔ ∃h: h is a function, ∃F:F⊆bool Y:
dom h=G,　rng h=F,　∀d:d∈G ⇒ h(d)∈d,　x=Intersect(F),　x≠empty set.

Intersection の定義　　∀x: x∈∨G ⇔ x is upper min depend of G (if G≠empty set)
otherwise ∨G=%I(Y), where %I(Y) is smallest partition of Y.

ここで G は、集合 Y の分割の全体(PARTITOINS Y)の部分集合である。

次に、２値関数について説明する。２値関数とは、1 と 0 の２値のみで構成される関数である。図 5 に２値関数のイメージ図の例を示した。

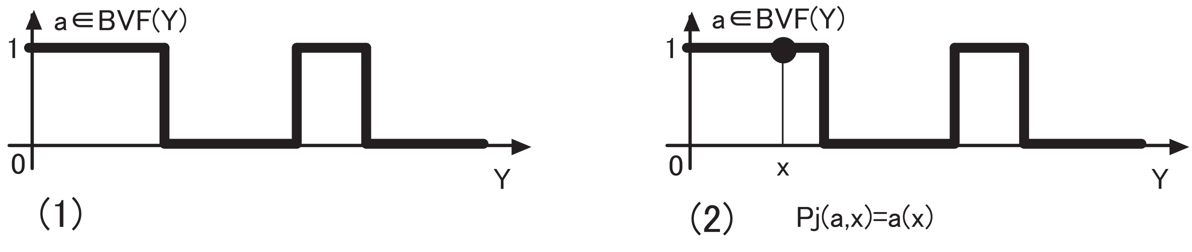

図 5.　２値関数

ここで、BOOLEAN={True,False}であり、 True=1 と False=0 である。

また、2 値関数 BVF(Y)、Pj(a,x)、a ‘<’ b の定義は、以下の通りである。

BVF(Y)の定義.　　BVF(Y)=Funcs(Y,BOOLEAN)

Pj(a,x)の定義　　a∈BVF(Y), ∀x∈Y: Pj(a,x)=a(x)

a ‘<’ b の定義　　a,b∈BVF(Y), ∀x∈Y: Pj(a,x)=True ⇒ Pj(b,x)=True

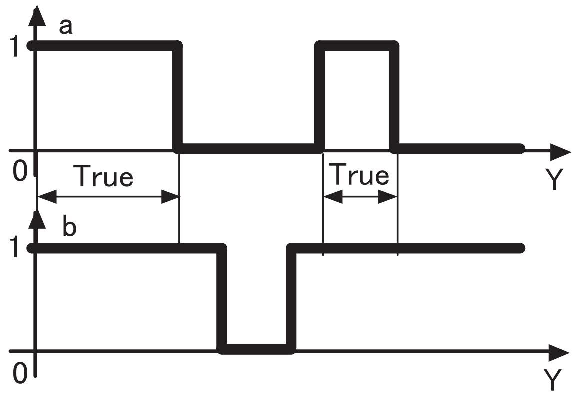

図 6.　a ‘<’ b (a　ならば　b)

「a ‘<’ b」(a　ならば　b)のイメージ図は、図 6 の通りである。すなわち、２値関数 a が True の区間では、２値関数 b が True になっている場合に、a ‘<’ b　と定義する。

次に、B_INF(a, PA)と B_SUP(a, PA)を定義する。

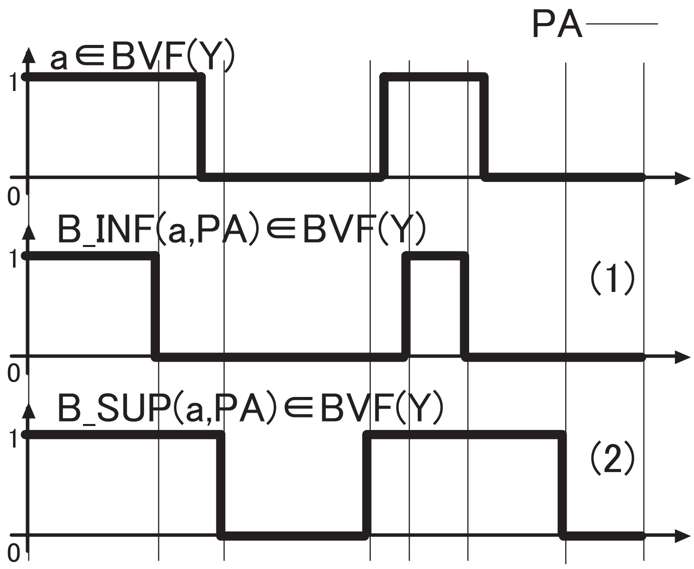

図 7.　２値関数 a の Inf　と　Sup

B_INF(a, PA)と B_SUP(a, PA)のイメージ図は、図 7 に示す通りである。
B_INF(a, PA)と B_SUP(a, PA)の定義は、以下の通りである。

B_INF(a, PA)の定義　　∀y∈Y:

(1)∀x∈Y,x∈EqClass(y,PA): Pj(a,x)=True ⇒ Pj(B_INF(a,PA),y)=True

(2) not (∀x∈Y,x∈EqClass(y,PA): Pj(a,x)=True) ⇒ Pj(B_INF(a,PA),y)=False

B_SUP(a, PA)の定義　　∀y∈Y:

(1)∃x∈Y:x∈EqClass(y,PA), Pj(a,x)=True ⇒ Pj(B_SUP(a,PA),y)=True

(2) not (∃x∈Y:x∈EqClass(y,PA), Pj(a,x)=True) ⇒ Pj(B_SUP(a,PA),y)=False

次に、集合 G が coordinates であることを以下のように定義する。ここで、集合 G は、集合 Y の分割の全体(PARTITOINS Y)の部分集合であるとする。

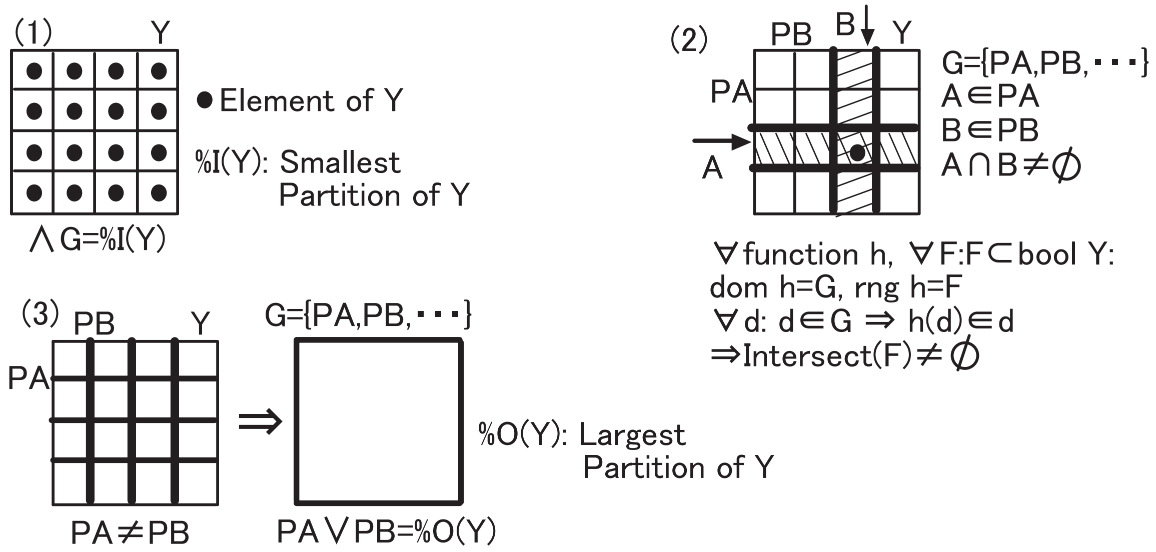

図 8.　Coordinates

図 8(1)の図は、G の Union が、集合 Y の最小分割であることを示している。Coordinates の定義は、以下の通りである。

Coordinate の定義

(1)　∧G=%I(Y)

(2)　∀h: h is function, ∀F:F⊆bool Y: dom h=G,　rng h=F,　∀d: d∈G ⇒ h(d)∈d
　⇒ Intersect(F)≠φ

(3)　∀PA,PB: PA,PB is a partition of Y, PA∈G ,PB∈G: PA≠PB ⇒ PA∨PB=%O(Y)

次に、分割における complement を定義する。

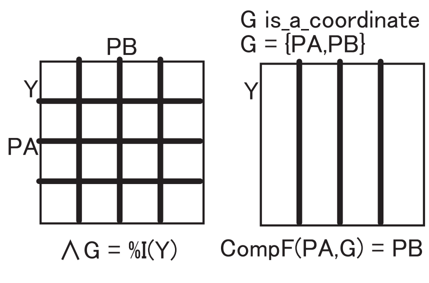

図 9.　Complement

例えば、もし、G={PA,PB} であり、かつ G が coordinates であるならば、
CompF(PA,G)=PB.　が成り立つ。
Complement の定義は、以下の通りである。

Complement の定義　CompF(PA,G)=∧(G ＼ {PA})

次に、「全ての(All)」と「ある(Exist)」に相当する All と Ex を、以下のように定義する。G が coordinates であるとし、G={PA, PB}とする。このとき、All と Ex のイメージ図を、図 10 に示した。

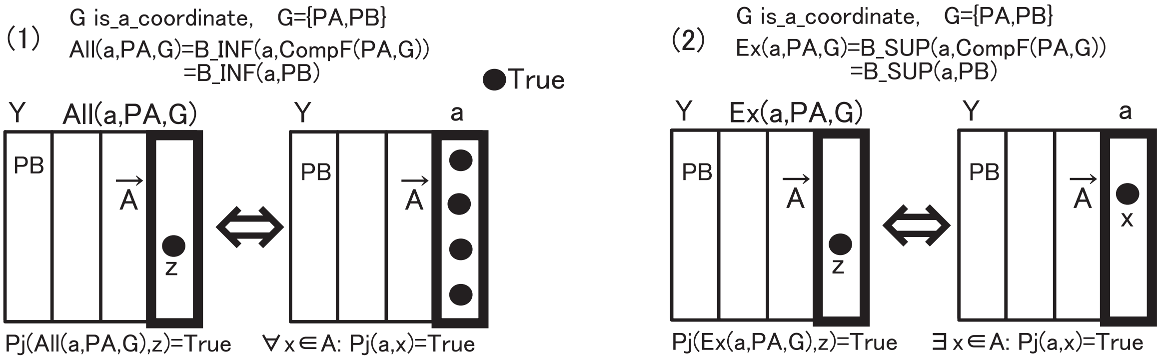

図 10.　All と Ex

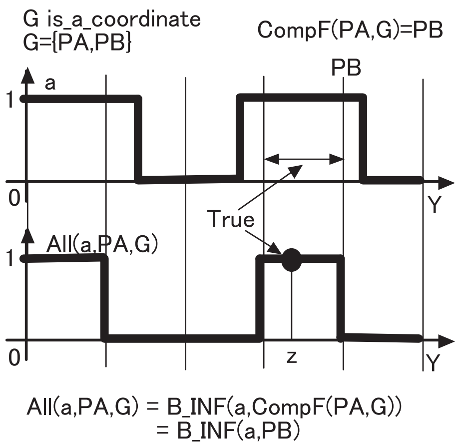

図 11.　All

2 値関数を使って、All をイメージ図で示したのが、図 11 である。

All と Ex の定義は、以下の通りである。

All の定義　a∈BVF(Y), PA is a partition of Y, G⊆PARTITIONS(Y):

All(a,PA,G) = B_INF(a,CompF(PA,G))

Ex の定義　a∈BVF(Y), PA is a partition of Y, G⊆PARTITIONS(Y):

Ex(a,PA,G) = B_SUP(a,CompF(PA,G))

最後に、これまでに定義した２値関数と集合の分割における様々な定義を利用して、述語論理の新しい数学的モデルのイメージ図を、図 12 に示す。

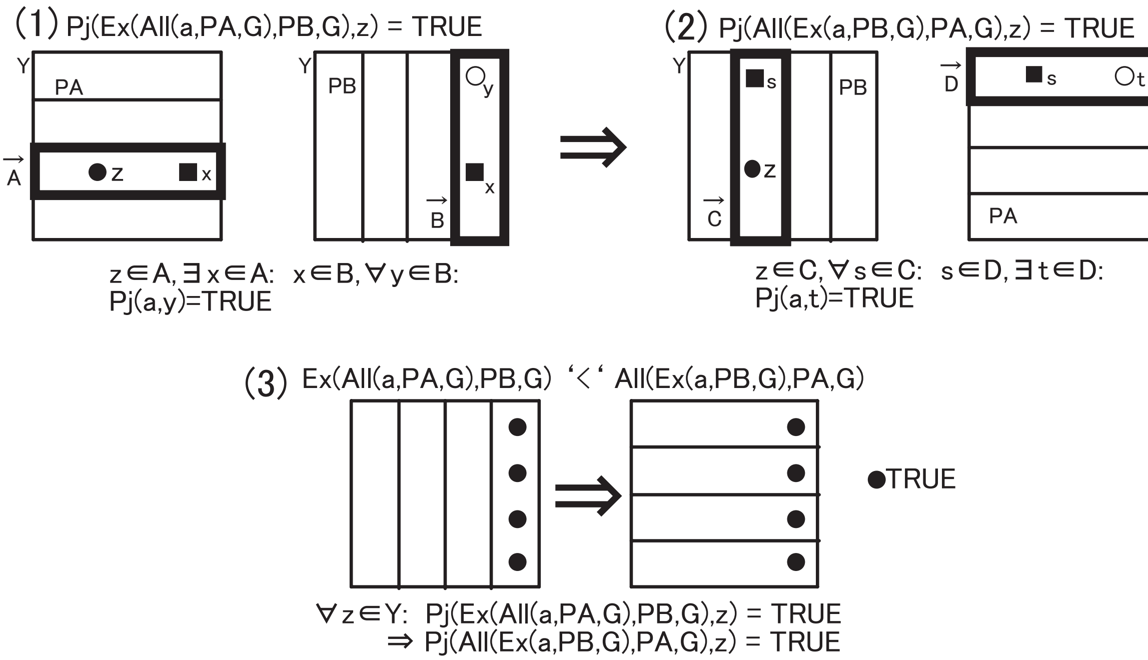

図 12. 新しい数学的モデルにおける述語論理の例

図 12 では、最初に示した従来の述語論理の“∃x∀yP(x,y)=True ⇒∀y∃xP(x,y)=True.”に相当する、新しい数学的モデルにおけるイメージ図を示してある。

新しい数学的モデルでは、“Ex(All(a,PA,G),PB,G) '<' All(Ex(a,PB,G),PA,G).” のように記述する。

“Pj(Ex(All(a,PA,G),PB,G),z) = True” のイメージを、 図 12(1)に示してある。
図 12(1)においては、以下が成り立つ。
A∈PA and B∈PB. の時、 z∈A, ∃x∈A: x∈B, ∀y∈B: Pj(a,y)=True.

また、数式の “Pj(All(Ex(a,PB,G),PA,G),z) = True” のイメージを、図 12(2)に示した。
図 12(2)においては、以下が成り立つ。
C∈PB and D∈PA. の時、 z∈C, ∀s∈C: s∈D, ∃t∈D:Pj(a,t)=True.

さらに、数式の “Ex(All(a,PA,G),PB,G) '<' All(Ex(a,PB,G),PA,G)” は、以下の数式に等しい。
“∀z∈Y: Pj(Ex(All(a,PA,G),PB,G),z) = True ⇒ Pj(All(Ex(a,PB,G),PA,G),z) = True.”

図 12(1)と図 12(2)のイメージ図から、以下の式が成り立つことが分かる。
“Ex(All(a,PA,G),PB,G) '<' All(Ex(a,PB,G),PA,G)”
この数式のイメージを、図 12(3)にて示した。

1 Boolean Valued Function and Partitions

In the following articles:[2], [3], [4], and [6], we have defined Boolean valued function with respect to partitions. And some of their algebraic properties are proved. We have also introduced and examined the infimum and supremum of Boolean valued functions and their properties. In this paper, some elementary Predicate calculus formulae for Boolean valued function are proved.

In this paper I have proved some elementary Predicate calculus formulae for Boolean valued functions with respect to partitions. Such a theory is an analogy of usual Predicate logic.

A Boolean valued function is a function of the type $f : X \to B$, where X is a non empty set and where B is a Boolean domain. A Boolean domain B is a two element set, that is, $B = \{0, 1\}$, whose elements are interpreted as logical values, for example, $0 = false$ and $1 = true$.

The correctness of the theorems in this paper was checked with Mizar[16] proof checker of computer.

Let Y be a non empty set. The functor $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$ was defined in article:[2] by:

(Def. 1) For every set x holds $x \in \mathrm{PARTITIONS}(Y)$ iff x is a partition of Y.

The functor $\mathrm{BVF}(Y)$ was defined in article:[3] by :

(Def. 2) $\mathrm{BVF}(Y) = Boolean^Y$.

Let us consider Y, let a be an element of $\mathrm{BVF}(Y)$, and let x be an element of Y. The functor $\mathrm{Pj}(a, x)$ yields an element of $Boolean$ and was defined in article:[3] by:

(Def. 3) $\mathrm{Pj}(a, x) = a(x)$.

Let us consider Y and let a, b be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$. The predicate $a \Subset b$ was defined in article:[3] by:

(Def. 4) For every element x of Y such that $\mathrm{Pj}(a, x) = true$ holds $\mathrm{Pj}(b, x) = true$.

Let us consider Y and let a be an element of $\mathrm{BVF}(Y)$. The functor $INF(a)$ yields an element of $\mathrm{BVF}(Y)$ and was defined in article:[3] as follows:

(Def. 5) $INF(a) = true(Y)$, if for every element x of Y holds $\mathrm{Pj}(a, x) = true$, otherwise $false(Y)$.

The functor $SUP(a)$ yielding an element of $\mathrm{BVF}(Y)$ was defined in article:[3] by:

(Def. 6) $SUP(a) = false(Y)$, if for every element x of Y holds $\mathrm{Pj}(a, x) = false$, otherwise $true(Y)$.

Let us consider Y, let P_1 be a partition of Y, and let G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$. The functor $CompF(P_1, G)$ yielding a partition of Y was defined in article:[4] by:

(Def. 7) $CompF(P_1, G) = \bigwedge G \setminus \{P_1\}$.

Let us consider Y, let a be an element of $\mathrm{BVF}(Y)$, let G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and let P_1 be a partition of Y. The functor $\forall_{a,P_1} G$ yielding an element of $\mathrm{BVF}(Y)$ was defined in article:[4] by:

(Def. 8) $\forall_{a,P_1} G = INF(a, CompF(P_1, G))$.

Let us consider Y, let a be an element of $\mathrm{BVF}(Y)$, let G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and let P_1 be a partition of Y. The functor $\exists_{a,P_1} G$ yielding an element of $\mathrm{BVF}(Y)$ was defined in article:[4] as follows:

(Def. 9) $\exists_{a,P_1} G = SUP(a, CompF(P_1, G))$.

2 Predicate Calculus for BVF(Y)

The terminology and notation used in this paper have been introduced in the following articles:[2], [3], [4], [6], [11], [14],and [15].

In this paper Y denotes a non empty set.

The following propositions are true:

1. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

   $\forall_{(a\Rightarrow b)\wedge(b\Rightarrow c),P_1}G \Subset \forall_{(a\Rightarrow(b\vee\neg c))\wedge(b\Rightarrow c),P_1}G.$

2. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

   $\forall_{(a\Rightarrow b)\wedge(b\Rightarrow c),P_1}G \Subset \forall_{(a\Rightarrow(b\vee c))\wedge(b\Rightarrow(c\vee a)),P_1}G.$

3. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

   $\forall_{(a\Rightarrow b)\wedge(b\Rightarrow c),P_1}G \Subset \forall_{(a\Rightarrow(b\vee\neg c))\wedge(b\Rightarrow(c\vee a)),P_1}G.$

4. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

   $\forall_{(a\Rightarrow b)\wedge(b\Rightarrow c),P_1}G \Subset \forall_{(a\Rightarrow(b\vee\neg c))\wedge(b\Rightarrow(c\vee\neg a)),P_1}G.$

5. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

   $\forall_{a\wedge(a\Rightarrow b)\wedge(b\Rightarrow c),P_1}G \Subset \forall_{c,P_1}G.$

6. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

   $\forall_{(a\vee b)\wedge(a\Rightarrow c)\wedge(b\Rightarrow c),P_1}G \Subset \forall_{\neg a\Rightarrow(b\vee c),P_1}G.$

7. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

   $\forall_{(a\Rightarrow b),P_1}G \Subset \forall_{(c\Rightarrow a)\Rightarrow(c\Rightarrow b),P_1}G.$

8. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

   $\forall_{(a\Leftrightarrow b),P_1}G \Subset \forall_{(a\Leftrightarrow c)\Leftrightarrow(b\Leftrightarrow c),P_1}G.$

9. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y.
   Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then
   $\forall_{(a \Leftrightarrow b), P_1} G \ \Subset \ \forall_{(a \Rightarrow c) \Leftrightarrow (b \Rightarrow c), P_1} G.$

10. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y.
    Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then
    $\forall_{(a \Leftrightarrow b), P_1} G \ \Subset \ \forall_{(c \Rightarrow a) \Leftrightarrow (c \Rightarrow b), P_1} G.$

11. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y.
    Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then
    $\forall_{(a \Leftrightarrow b), P_1} G \ \Subset \ \forall_{(a \wedge c) \Leftrightarrow (b \wedge c), P_1} G.$

12. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y.
    Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then
    $\forall_{(a \Leftrightarrow b), P_1} G \ \Subset \ \forall_{(a \vee c) \Leftrightarrow (b \vee c), P_1} G.$

13. Let a, b be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y.
    Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then
    $\forall_{a, P_1} G \ \Subset \ \forall_{(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (b \Leftrightarrow a) \Leftrightarrow a, P_1} G.$

14. Let a, b be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y.
    Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then
    $\forall_{a, P_1} G \ \Subset \ \forall_{(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow b, P_1} G.$

15. Let a, b be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y.
    Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then
    $\forall_{a, P_1} G \ \Subset \ \forall_{(b \Rightarrow a) \Leftrightarrow a, P_1} G.$

16. Let a, b be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y.
    Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then
    $\forall_{a, P_1} G \ \Subset \ \forall_{(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a) \Leftrightarrow a, P_1} G.$

17. Let a, b be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y.
    Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then
    $\forall_{\neg a, P_1} G \ \Subset \ \forall_{(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \neg a, P_1} G.$

18. Let a, b be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

    $\forall_{\neg a, P_1} G \Subset \forall_{(b \Rightarrow a) \Leftrightarrow \neg b, P_1} G$.

19. Let a, b be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

    $\forall_{a, P_1} G \Subset \forall_{(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a) \Leftrightarrow a, P_1} G$.

20. Let a, b, c be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

    $\forall_{(a \vee b) \wedge (b \Rightarrow c), P_1} G \Subset \forall_{a \vee c, P_1} G$.

21. Let a, b be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

    $\forall_{a \wedge (a \Rightarrow b), P_1} G \Subset \forall_{b, P_1} G$.

22. Let a, b be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

    $\forall_{(a \Rightarrow b) \wedge \neg b, P_1} G \Subset \forall_{\neg a, P_1} G$.

23. Let a, b be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

    $\forall_{(a \vee b) \wedge \neg a, P_1} G \Subset \forall_{b, P_1} G$.

24. Let a, b be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

    $\forall_{(a \Rightarrow b) \wedge (\neg a \Rightarrow b), P_1} G \Subset \forall_{b, P_1} G$.

25. Let a, b be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

    $\forall_{(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow \neg b), P_1} G \Subset \forall_{\neg a, P_1} G$.

26. Let $a1, a2, b1, b2, c1, c2$ be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

    $\forall_{(a1 \Rightarrow a2) \wedge (b1 \Rightarrow b2) \wedge (c1 \Rightarrow c2) \wedge (a1 \vee b1 \vee c1), P_1} G \Subset \forall_{a2 \vee b2 \vee c2, P_1} G$.

27. Let a, b, c, d be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

    $\forall_{(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow d) \wedge (a \vee b), P_1} G \Subset \forall_{c \vee d, P_1} G.$

28. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

    $\forall_{((a \wedge b) \Rightarrow \neg c) \wedge a \wedge c, P_1} G \Subset \forall_{\neg b, P_1} G.$

29. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

    $\forall_{(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c), P_1} G \Subset \forall_{a \Rightarrow (b \wedge c), P_1} G.$

30. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then

    $\forall_{(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c), P_1} G \Subset \forall_{(a \vee b) \Rightarrow c, P_1} G.$

3 Conclusion

In this paper, some elementary Predicate calculus formulae for Boolean valued function with respect to partitions are proved. The correctness of the proof was checked by Mizar[16] proof checker by using computer.

References

[1] Shunichi Kobayashi. A Model of Predicate Calculus on Partitions, Mechanized Mathematics and Its Applications, Vol.1, No.1, pp.21-29, 2000.

`http://mizar-jp.org/papers/Vol1_2000/paper_4_for_web.pdf`

[2] Shunichi Kobayashi, Kui Jia. A Theory of Partitions. Part I, Formalized Mathematics 7(2), pages 243-247, 1998.

`http://www.mizar.org/fm/1998-7/pdf7-2/partit1.pdf`

`http://www.mizar.org/JFM/Vol10/partit1.miz.html`

[3] Shunichi Kobayashi, Kui Jia. A Theory of Boolean Valued Functions and Partitions, Formalized Mathematics 7(2), pages 249-254, 1998.

`http://www.mizar.org/fm/1998-7/pdf7-2/bvfunc_1.pdf`

`http://www.mizar.org/JFM/Vol10/bvfunc_1.miz.html`

[4] Shunichi Kobayashi, Yatsuka Nakamura. A Theory of Boolean Valued Functions and Quantifiers with Respect to Partitions, Formalized Mathematics 7(2), pages 307-312, 1998.

`http://www.mizar.org/fm/1998-7/pdf7-2/bvfunc_2.pdf`

`http://www.mizar.org/JFM/Vol10/bvfunc_2.miz.html`

[5] Shunichi Kobayashi. On the Calculus of Binary Arithmetics, Formalized Mathematics 11(4), pages 417-419, 2003.

`http://www.mizar.org/fm/2003-11/pdf11-4/binari_5.pdf`

`http://www.mizar.org/JFM/Vol15/binari_5.miz.html`

[6] Shunichi Kobayashi. Propositional Calculus for Boolean Valued Functions. Part VIII, Formalized Mathematics 13(1), pages 55-58, 2005.

`http://www.mizar.org/fm/2005-13/pdf13-1/bvfunc26.pdf`

[7] Shunichi Kobayashi, Yatsuka Nakamura. Predicate Calculus for Boolean Valued Functions. Part I, Formalized Mathematics 7(2), pages 313-316, 1998.

`http://mizar.org/fm/1998-7/pdf7-2/bvfunc_3.pdf`

`http://www.mizar.org/JFM/Vol10/bvfunc_3.miz.html`

[8] Shunichi Kobayashi, Yatsuka Nakamura. Predicate Calculus for Boolean Valued Functions. Part II, Formalized Mathematics 8(1), pages 107-109, 1999.

`http://mizar.org/fm/1999-8/pdf8-1/bvfunc_4.pdf`

`http://www.mizar.org/JFM/Vol11/bvfunc_4.miz.html`

[9] Shunichi Kobayashi, Yatsuka Nakamura. Predicate Calculus for Boolean Valued Functions. Part III, Formalized Mathematics 9(1), pages 51-53, 2001.

`http://mizar.org/fm/2001-9/pdf9-1/bvfunc11.pdf`

`http://www.mizar.org/JFM/Vol11/bvfunc11.miz.html`

[10] Czeslaw Bylinski. Functions and Their Basic Properties, Formalized Mathematics 1(1), pages 55-65, 1990.

`http://www.mizar.org/fm/1990-1/pdf1-1/funct_1.pdf`

[11] Andrzej Trybulec. Function Domains and Fraenkel Operator, Formalized Mathematics 1(3), pages 495-500, 1990.

`http://www.mizar.org/fm/1990-1/pdf1-3/fraenkel.pdf`

[12] Andrzej Trybulec. Tarski Grothendieck Set Theory, Formalized Mathematics 1(1), pages 9-11, 1990.

`http://www.mizar.org/fm/1990-1/pdf1-1/tarski.pdf`

[13] Zinaida Trybulec. Properties of Subsets, Formalized Mathematics 1(1), pages 67-71, 1990.

`http://www.mizar.org/fm/1990-1/pdf1-1/subset_1.pdf`

[14] Edmund Woronowicz. Interpretation and Satisfiability in the First Order Logic, Formalized Mathematics 1(4), pages 739-743, 1990.

`http://www.mizar.org/fm/1990-1/pdf1-4/valuat_1.pdf`

[15] Edmund Woronowicz. Many–Argument Relations, Formalized Mathematics 1(4), pages 733-737, 1990.

`http://www.mizar.org/fm/1990-1/pdf1-4/margrel1.pdf`

[16] The Mizar system consists of a language for writing strictly formalized mathematical definitions and proofs, a computer program which is able to check proofs written in this language, and a library of definitions and proved theorems which can be referred to and used in new articles.

`http://www.mizar.org/`