Predicate Calculus for Boolean Valued Functions (14)

KOBAYASHI Shunichi

二値関数における述語論理（14）

小林　俊一

要　旨

二値関数と集合の分割に関する述語論理について成り立つ定理を提案し、その定理の厳格な証明を行った。ここでの述語論理とは「すべての～について」や「ある～について」に関する一階述語論理を指す。従来の数学の証明では、証明に微塵の誤りもないことを保証することができなかった。本研究では、数学の証明を保証する手段として数学証明検証システム（プルーフチェッカー）を利用している。本研究で提案している述語論理の新しい数学的なモデルの中では、数多くの述語論理の定理が正しいことが、微塵の誤りもない形で証明できた。

キーワード

二値関数　　述語論理　　集合の分割

目　次

はじめに

本研究は、従来からある「命題論理」と「述語論理」の新しい数学的モデルを、コンピュータ時代に適した形で提案するものである。ここで、命題論理とは「かつ」「または」「ならば」「でない」などの関係を、論理記号を用いて論理積・論理和・含意・否定などにより記号化し、演算形式に表し、複合された命題を研究するものである。また、述語論理とは「全ての〜」「ある〜」などを、論理記号によって記号化して研究するものである。

具体例を挙げれば、命題論理としては、例えば「ＡならばＢ」「ＢならばＣ」が成り立つときに、「ＡならばＣ」が成り立つ(三段論法)というような例が挙げられる。また、述語論理としては、例えば、「全ての猫が餌を食べる」「タマは猫である」という２つが成り立つ場合には「タマは餌を食べる」ことが成り立つ、というような論理に関する例がある。

コンピュータが登場する前の時代の数学では、数学の研究者は紙の上で計算をし、また証明を行ってきた。しかし、数学の証明が、百パーセント厳格な形で本当に正しいものであるということを保証されているのか、疑問に感じられる面もあった。すなわち、数学は非常に厳密な学問のように思われてきたが、その厳密さに疑問を感じる面もあった。

すなわち、世の中では数学は答えが一つしかなく、絶対的に正しいものであるかのように思われている。しかし、数学の証明を正確に記述し、それを微塵の誤りもないものとして完全に保証できるのか、疑問に感じる人々も存在するのも事実である。例えば、有名な数学の書籍などでも、自身で正確に証明が正しいかを検証すると、一部の証明などに誤りを発見した経験をする人も、少なからずいると聞いたことがある。

数学の証明では、難解な数式や記号を用いて、複雑な論理を組み立ててきた。このような数学の証明では、もし一つの式の変形や、記号の使い方などに論理的な誤りがある場合には、その証明の全体が誤りであることになる。数学を専門とする研究者でも、人間である限りミスをしてしまうことは十分に考えられる。人間の力だけで、数学の証明を行っていた時代では、その証明の途中の式変形などが、本当に微塵の誤りもなく正しいことを保証する手段がなかった。このため、本来は極めて厳格で正確であるはずの数学が、本当に正しいものであるのかという疑問も生じてくる。

一方、コンピュータの世界は、本当の意味で極めて厳格な世界である。コンピュータプログラムを作成する際には、たった一つの文字が間違っているだけでも、動作がおかしくなり多大な問題を引き起こす。コンピュータプログラムの誤りはバグと呼ばれ、さまざまな世界で重大な社会的な問題を引き起こす場合すらある。プログラムは、百パーセント正しく作らなければ、正しく動作することはない。すなわち、コンピュータは、人間が持っていない極めて厳格な世界であると言える。

このようなコンピュータ時代が到来してから、コンピュータと出会った数学者たちは、数学の証明の確からしさを、コンピュータを使って正確にチェックすることができるのではと考え始めた。そして、数学の証明の正しさを、厳格な形でチェック可能なシステムが世界中で開発されてきた。

すなわち、コンピュータを利用することによって、数学の証明の確からしさのチェックをコンピュータ上で行うソフトウェアが数多く開発されてきた。これらは、数学の証明の正しさをチェックするシステムということで、「プルーフチェッカー」と呼ばれている。「プルーフチェッカー」の中でも、特に有名なものはポーランドのワルシャワ大学の Andrzej

Trybulec 教授を中心とした Mizar グループが開発した Mizar システム [15] があげられる。

「プルーフチェッカー」では、コンピュータに適した形の数学言語と呼ばれるものを利用する。数学言語は、コンピュータプログラムと、かなり類似性がある。すなわち、コンピュータプログラムを記述するように、数学言語を利用することで、数学の証明を記述していく。そして、数学言語で記述された数学の証明を、「プルーフチェッカー」を使うことで、その証明の全過程に全て誤りがないかをチェックすることが可能となる。ここで、「プルーフチェッカー」は証明の自動化でなく、証明の検証を行うだけのシステムである。

Mizar システムのようなプルーフチェッカーでは、既に完全に正しいことが証明された数多くの定理などを、完全に正しいものとして簡単に部品のように利用することができる。これにより、複雑な数学の証明も、部品化された定理などを組み合わせることで簡単に証明することも可能になる。これは、ちょうど複雑なコンピュータプログラムを作成する場合に、必要なソフトウェア部品であるライブラリなどを利用することで、簡単に高度なソフトウェアが構築できるのと極めて似ている。

本論文で証明した定理は、従来からある「述語論理」を、「二値関数」と「集合の分割」の考え方を導入することによって、「述語論理」の新しい数学的なモデルとして構築し直したところに新規性がある。この新しく提案した数学的なモデルは、従来の「命題論理」と「述語論理」のアナロジー (同じ特徴を持つ別のもの) であると言える。この数学的なモデルは、従来の「命題論理」と「述語論理」の本質を、適切に表現できる点に特徴がある。

実際には、「命題論理」と「述語論理」の新しい数学的なモデルにおける定理を、既に数多く発表済みであり、本論文は、その続きの新しい定理を提案するものである。私が、これまで論文として作成した数学の証明は、全て Mizar システムの「数学言語」と「プルーフチェッカー」を利用して作成したものである。

Mizar システムの「プルーフチェッカー」を利用することで、従来から正しいとされてきた「命題論理」や「述語論理」の定理の多くが、本当に厳格な形で百パーセント正しいと保証できるのかを検証してみたいと考えて研究を進めてきた。この研究を進めてきた結果、従来から正しいとされてきた「命題論理」と「述語論理」の数多くの定理が、提案している新しい数学モデルの中では、本当の意味で、微塵の誤りもなく正しいことが証明できることを明らかにすることができた。

本研究で提案する「命題論理」と「述語論理」の新しい数学的モデルの基礎的な定義や定理などについては、[2], [3], [4], [6] で既に発表済みである。また、従来の「述語論理」と、本研究で提案している「述語論理」の新しい数学的なモデルとの関係については、[1] の論文にて詳しく記述してある。[1] では、「二値関数」と「集合の分割」の説明も記載してある。

この [1] の論文では、図式化した形で詳細に説明をしてあるため、これをご覧頂けば、「述語論理」の新しい数学的なモデルが、どのようなものであるかを理解できると思う。なお、これらの論文は、インターネットから自由にダウンロード可能であり、そのアドレスも最後に一覧で示してある。さらに、参考までに [2], [3], [4], [6] に、各論文の Mizar システムの数学言語で記述した証明の全容も、アドレスで示してある。ここで、アドレスの最後が pdf になっているものが英語の論文であり、アドレスの最後が miz になっているものが、Mizar システムの数学言語で記述した数学の証明である。

1 Introduction

In the following articles:[2], [3], [4], and [6], we have defined Boolean valued function with respect to partitions. And some of their algebraic properties are proved. We have also introduced and examined the infimum and supremum of Boolean valued functions and their properties. In this paper, some elementary Predicate calculus formulae for Boolean valued function are proved.

In this paper I have proved some elementary Predicate calculus formulae for Boolean valued functions with respect to partitions. Such a theory is an analogy of usual Predicate logic.

A Boolean valued function is a function of the type $f : X \to B$, where X is a non empty set and where B is a Boolean domain. A Boolean domain B is a two element set, that is, $B = \{0,\ 1\}$, whose elements are interpreted as logical values, for example, $0 = false$ and $1 = true$.

The correctness of the theorems in this paper was checked with Mizar[15] proof checker of computer.

Let Y be a non empty set. The functor PARTITIONS(Y) was defined in article:[2] by:

(Def. 1) For every set x holds $x \in$ PARTITIONS(Y) iff x is a partition of Y.

The functor BVF(Y) was defined in article:[3] by :

(Def. 2) BVF(Y) $= Boolean^{Y}$.

Let us consider Y, let a be an element of BVF(Y), and let x be an element of Y. The functor Pj(a, x) yields an element of $Boolean$ and was defined in article:[3] by:

(Def. 3) Pj$(a, x) = a(x)$.

Let us consider Y and let a, b be elements of BVF(Y). The predicate $a \Subset b$ was defined in article:[3] by:

(Def. 4) For every element x of Y such that Pj$(a, x) = true$ holds Pj$(b, x) = true$.

Let us consider Y and let a be an element of BVF(Y). The functor

$INF(a)$ yields an element of BVF(Y) and was defined in article:[3] as follows:

(Def. 5) $INF(a) = true(Y)$, if for every element x of Y holds $\mathrm{Pj}(a, x) = true$, otherwise $false(Y)$.

The functor $SUP(a)$ yielding an element of BVF(Y) was defined in article:[3] by:

(Def. 6) $SUP(a) = false(Y)$, if for every element x of Y holds $\mathrm{Pj}(a, x) = false$, otherwise $true(Y)$.

Let us consider Y, let P_1 be a partition of Y, and let G be a subset of PARTITIONS(Y). The functor $CompF(P_1, G)$ yielding a partition of Y was defined in article:[4] by:

(Def. 7) $CompF(P_1, G) = \bigwedge G \setminus \{P_1\}$.

Let us consider Y, let a be an element of BVF(Y), let G be a subset of PARTITIONS(Y), and let P_1 be a partition of Y. The functor $\forall_{a,P_1} G$ yielding an element of BVF(Y) was defined in article:[4] by:

(Def. 8) $\forall_{a,P_1} G = INF(a, CompF(P_1, G))$.

Let us consider Y, let a be an element of BVF(Y), let G be a subset of PARTITIONS(Y), and let P_1 be a partition of Y. The functor $\exists_{a,P_1} G$ yielding an element of BVF(Y) was defined in article:[4] as follows:

(Def. 9) $\exists_{a,P_1} G = SUP(a, CompF(P_1, G))$.

2 Predicate Calculus for BVF(Y)

The terminology and notation used in this paper have been introduced in the following articles:[2], [3], [4], [6], [8], [11],and [12].

In this paper Y denotes a non empty set.

The following propositions are true:

1. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y),

and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a \Rightarrow b, P_1} G \Subset \exists_{(a \vee c) \Rightarrow (b \vee c), P_1} G$.

2. Let a, b, c be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a \wedge b \vee c, P_1} G \Subset \exists_{a \vee c, P_1} G$.

3. Let a, b, c, d be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{(a \wedge b) \vee (c \wedge d), P_1} G \Subset \exists_{a \vee c, P_1} G$.

4. Let a, b, c be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{(a \vee b) \wedge (b \Rightarrow c), P_1} G \Subset \exists_{a \vee c, P_1} G$.

5. Let a, b, c be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{(a \Rightarrow b) \wedge (\neg a \Rightarrow c), P_1} G \Subset \exists_{b \vee c, P_1} G$.

6. Let a, b, c be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c), P_1} G \Subset \exists_{\neg a \vee \neg b, P_1} G$.

7. Let a, b, c be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c), P_1} G \Subset \exists_{b \vee c, P_1} G$.

8. Let a, b, c, d be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d), P_1} G \Subset \exists_{(a \wedge c) \Rightarrow (b \wedge d), P_1} G$.

9. Let a, b, c be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c), P_1} G \Subset \exists_{a \Rightarrow (b \wedge c), P_1} G$.

10. Let a, b, c be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)), P_1} G \Subset \exists_{(a \vee b) \Rightarrow c, P_1} G$.

11. Let a, b, c, d be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d), P_1} G \Subset \exists_{(a \vee c) \Rightarrow (b \vee d), P_1} G$.

12. Let a, b, c be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c), P_1} G \Subset \exists_{a \Rightarrow (b \vee c), P_1} G$.

13. Let $a1, a2, b1, b2, c1, c2$ be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{(b1 \Rightarrow b2) \wedge (c1 \Rightarrow c2) \wedge (a1 \vee b1 \vee c1) \wedge \neg (a2 \wedge b2) \wedge \neg (a2 \wedge c2), P_1} G \Subset \exists_{a2 \Rightarrow a1, P_1} G$.

14. Let $a1, a2, b1, b2, c1, c2$ be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{(a1 \Rightarrow a2) \wedge (b1 \Rightarrow b2) \wedge (c1 \Rightarrow c2) \wedge (a1 \vee b1 \vee c1) \wedge \neg (a2 \wedge b2) \wedge \neg (a2 \wedge c2) \wedge \neg (b2 \wedge c2), P_1} G \Subset \exists_{(a2 \Rightarrow a1) \wedge (b2 \Rightarrow b1) \wedge (c2 \Rightarrow c1), P_1} G$.

15. Let $a1, a2, b1, b2, c1, c2$ be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a

coordinate and $P_1 \in G$, then

$\forall_{(a1 \Rightarrow a2)\wedge(b1 \Rightarrow b2)\wedge(c1 \Rightarrow c2)\wedge\neg(a2\wedge b2)\wedge\neg(a2\wedge c2)\wedge\neg(b2\wedge c2),P_1} G \Subset$

$\exists_{\neg(a1\wedge b1)\wedge\neg(a1\wedge c1)\wedge\neg(b1\wedge c1),P_1} G$.

16. Let a, b be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a\wedge b,P_1} G \Subset \exists_{a,P_1} G$.

17. Let a, b, c be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a\wedge b\wedge c,P_1} G \Subset \exists_{a,P_1} G$.

18. Let a, b, c be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a\wedge b\wedge c,P_1} G \Subset \exists_{b,P_1} G$.

19. Let a, b, c, d be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a\wedge b\wedge c\wedge d,P_1} G \Subset \exists_{a,P_1} G$.

20. Let a, b, c, d be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a\wedge b\wedge c\wedge d,P_1} G \Subset \exists_{b,P_1} G$.

21. Let a, b, c, d, e be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a\wedge b\wedge c\wedge d\wedge e,P_1} G \Subset \exists_{a,P_1} G$.

22. Let a, b, c, d, e be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of

PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e, P_1} G \Subset \exists_{b, P_1} G$.

23. Let a, b, c, d, e, f be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e \wedge f, P_1} G \Subset \exists_{a, P_1} G$.

24. Let a, b, c, d, e, f be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e \wedge f, P_1} G \Subset \exists_{b, P_1} G$.

25. Let a, b, c, d, e, f, g be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e \wedge f \wedge g, P_1} G \Subset \exists_{a, P_1} G$.

26. Let a, b, c, d, e, f, g be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e \wedge f \wedge g, P_1} G \Subset \exists_{b, P_1} G$.

27. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c) \wedge (a \vee b), P_1} G \Subset \exists_{c, P_1} G$.

28. Let a, b, c be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{((a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)) \wedge (a \wedge b), P_1} G \Subset \exists_{c, P_1} G$.

29. Let a, b be elements of BVF(Y), G be a subset of PARTITIONS(Y), and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a, P_1} G \Subset \exists_{a \vee b, P_1} G$.

30. Let a, b be elements of $\mathrm{BVF}(Y)$, G be a subset of $\mathrm{PARTITIONS}(Y)$, and P_1 be a partition of Y. Suppose G is a coordinate and $P_1 \in G$, then $\forall_{a \wedge b, P_1} G \ \Subset \ \exists_{a \vee b, P_1} G$.

3 Conclusion

In this paper, some elementary Predicate calculus formulae for Boolean valued function with respect to partitions are proved. The correctness of the proof was checked by Mizar[15] proof checker by using computer.

References

[1] Shunichi Kobayashi. A Model of Predicate Calculus on Partitions, Mechanized Mathematics and Its Applications, Vol.1, No.1, pp.21-29, 2000.

`http://markun.cs.shinshu-u.ac.jp/mizar/mma.dir /2000/v1_toc.pl.cgi?PAPER_LABEL=PAPER3`

[2] Shunichi Kobayashi, Kui Jia. A Theory of Partitions. Part I, Formalized Mathematics 7(2), pages 243-247, 1998.

`http://mizar.uwb.edu.pl/fm/1998-7/pdf7-2/partit1.pdf`

`http://www.mizar.org/version/current/mml/partit1.miz`

[3] Shunichi Kobayashi, Kui Jia. A Theory of Boolean Valued Functions and Partitions, Formalized Mathematics 7(2), pages 249-254, 1998.

`http://mizar.uwb.edu.pl/fm/1998-7/pdf7-2/bvfunc_1.pdf`

`http://www.mizar.org/version/current/mml/bvfunc_1.miz`

[4] Shunichi Kobayashi, Yatsuka Nakamura. A Theory of Boolean Valued Functions and Quantifiers with Respect to Partitions, Formalized Mathematics 7(2), pages 307-312, 1998.

http://mizar.uwb.edu.pl/fm/1998-7/pdf7-2/bvfunc_2.pdf

http://www.mizar.org/version/current/mml/bvfunc_2.miz

[5] Shunichi Kobayashi. On the Calculus of Binary Arithmetics, Formalized Mathematics 11(4), pages 417-419, 2003.

http://mizar.uwb.edu.pl/fm/2003-11/pdf11-4/binari_5.pdf

[6] Shunichi Kobayashi. Propositional Calculus for Boolean Valued Functions. Part VIII, Formalized Mathematics 13(1), pages 55-58, 2005.

http://mizar.uwb.edu.pl/fm/2005-13/pdf13-1/bvfunc26.pdf

http://www.mizar.org/version/current/mml/bvfunc26.miz

[7] Czeslaw Bylinski. Functions and Their Basic Properties, Formalized Mathematics 1(1), pages 55-65, 1990.

http://mizar.uwb.edu.pl/fm/1990-1/pdf1-1/funct_1.pdf

[8] Andrzej Trybulec. Function Domains and Fraenkel Operator, Formalized Mathematics 1(3), pages 495-500, 1990.

http://mizar.uwb.edu.pl/fm/1990-1/pdf1-3/fraenkel.pdf

[9] Andrzej Trybulec. Tarski Grothendieck Set Theory, Formalized Mathematics 1(1), pages 9-11, 1990.

http://mizar.uwb.edu.pl/fm/1990-1/pdf1-1/tarski.pdf

[10] Zinaida Trybulec. Properties of Subsets, Formalized Mathematics 1(1), pages 67-71, 1990.

http://mizar.uwb.edu.pl/fm/1990-1/pdf1-1/subset_1.pdf

[11] Edmund Woronowicz. Interpretation and Satisfiability in the First Order Logic, Formalized Mathematics 1(4), pages 739-743, 1990.

http://mizar.uwb.edu.pl/fm/1990-1/pdf1-4/valuat_1.pdf

[12] Edmund Woronowicz. Many–Argument Relations, Formalized Mathematics 1(4), pages 733-737, 1990.

http://mizar.uwb.edu.pl/fm/1990-1/pdf1-4/margrel1.pdf

[13] Edmund Woronowicz. Relations and Their Basic Properties, Formalized Mathematics 1(1), pages 73-83, 1990.

http://mizar.uwb.edu.pl/fm/1990-1/pdf1-1/relat_1.pdf

[14] Grzegorz Bancerek, Andrzej Trybulec. Miscellaneous Facts about Functions, Formalized Mathematics 5(4), pages 485-492, 1996.

http://mizar.uwb.edu.pl/fm/1996-5/pdf5-4/funct_7.pdf

[15] The Mizar system consists of a language for writing strictly formalized mathematical definitions and proofs, a computer program which is able to check proofs written in this language, and a library of definitions and proved theorems which can be referred to and used in new articles.

http://mizar.uwb.edu.pl