

論文

これからの算数教育で大切にすべきことは何か — 数学的活動を中心として —

佐藤 茂太郎

The Future of Mathematics Education: Focusing on Mathematical Activities

SATO Shigetaro

要 旨

本稿の目的は、数学的活動の具体的な事例を通して算数・数学教育が目指す「数学的活動」について明らかにすることである。次期学習指導要領では、小学校課程も「算数的活動」から「数学的活動」という文言に変わり義務教育課程で文言の統一が図られた。この「数学的活動」の意味は何かということを追究していくことが、これからの算数教育で大切になる。そのために、島田(1977)の「水槽の問題」を通して数学的活動について考察する方法をとった。そして、一連のプロセスを通じて何を大切にしていけばよいか、今後の指導のあり方を示唆した。

キーワード

次期学習指導要領 算数・数学教育 数学的活動 水槽の問題

目 次

- I. はじめに
- II. 本研究の目的と方法
- III. 数学的活動とは何か
- IV. 本研究の具体的取り組み
- V. まとめと今後の取り組みに向けた課題

注

文献

I. はじめに

現行の学習指導要領解説算数編¹⁾では、算数的活動を通して算数の学習活動を行うように示されている。しかしながら、次期学習指導要領解説算数編^{2) 注1)}には算数的活動というキーワードではなく数学的活動というキーワードが入るようになった。数学的活動のイメージとして次の図1²⁾が示されている。

これからの算数(数学)の学習は、この過程を意識した授業実践に取り組んでいくことが大切である。そこで、数学的活動の意味を明らかにすることを目指し、具体的に追究することにした。

II. 本研究の目的と方法

本稿の目的は、まず、数学的活動とは何か明らかにし、具体的な活動を通して「活動」のイメージを掴むことである。そして、平常の授業でどのように生かせばよいか示唆を与えるものである。

本研究の方法は、次のように行う。島田(1977)³⁾⁴⁾の数学的活動のイメージ図をもとに活動に取り組むことである。特に、「水槽の問題」を対象として数学的活動に取り組むものとする。

III. 数学的活動とは何か

数学的活動について、ここでは、島田(1977)の示す図の一連の活動を数学的活動として進めていく。その理由として、この図1をさらに詳細に示している図だからである。それでは、島田(1977)「数学的活動：現実の世界と数学の世界」の図2の意味を理解していこう。

島田(1977)は、図2について次のように説明している。

まずはじめに、a.現実の世界とb.数学の世界とがあり、現実の世界には、何らかの意味でc.問題があり、解決をせまっているとする。(中略)cの問題に対しては、現実の世界の経験から、その

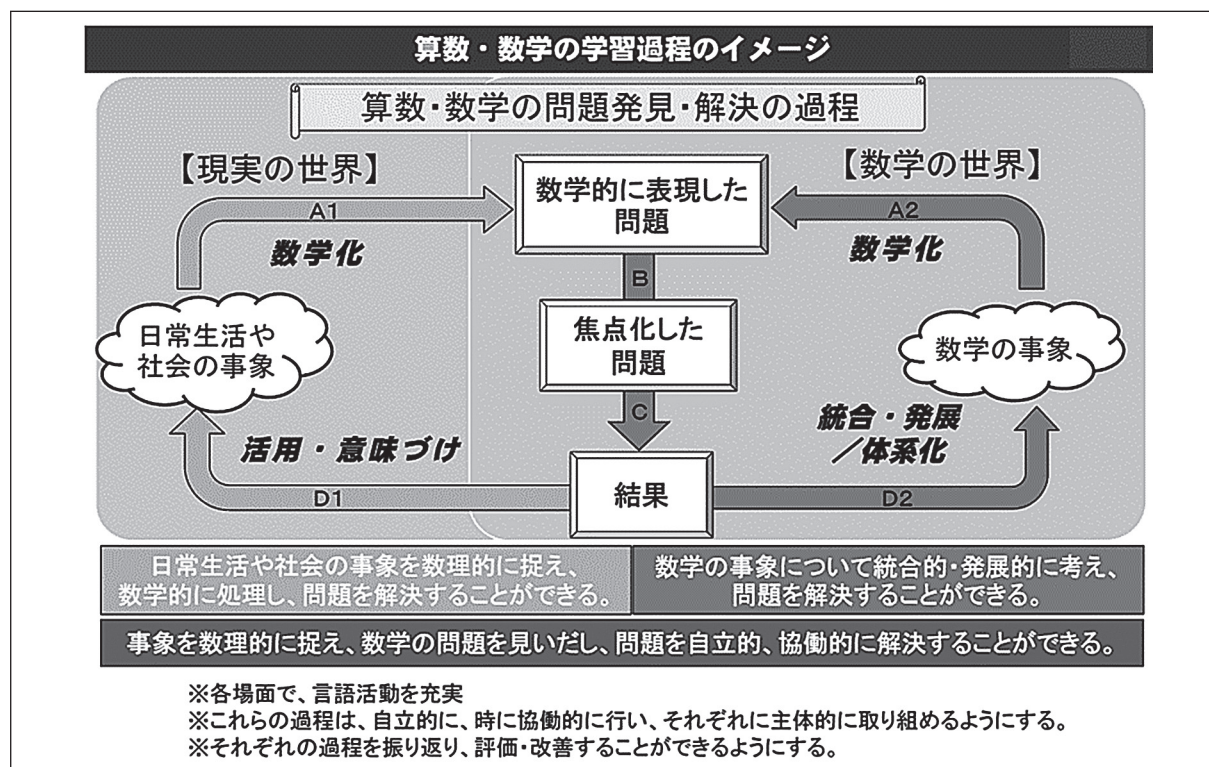


図1. 算数・数学の学習過程のイメージ (文部科学省、2018、p.8)

f. 条件・仮説を設定し、さらに数学の理論が適用可能になるように、条件・仮説を抽象化、理想化あるいは単純化して、数学のことばによってこれらをいい換える。(中略) こうして、いわば活動者の得意の土俵に問題をひきずりこんでいい換えたのが、g. の公理化の段階である。

(島田、1977、pp.14-15)

数学的活動は、受け身のものではなく、解決をせまる必要性があり、そのことを抽象化して数学化していく過程であると捉えることができよう。さらに氏は説明する。

gとして、公理的なものがまとめられ、そこから、現実世界についての命題と対応するgの中に命題が作れる。この後者の命題の真偽は、gの公理系からの演繹によってのみ決定される。この演繹にはgの公理系とともに、e.の数学の理論が全

面的に駆使される。

しかし、それでもうまく演繹が進められない場合は、i.新理論の開発に進むことが必要である。(中略)演繹によって導いたj.結論は、これに対応して、aの現実の世界で経験的に収集したk.データと、l.照合させられる。このとき、データと結論とが、 $f \rightarrow g$ の際に求めた近似の範囲内で合えば、fの過程は否定されず、一応そのまま保持される。もし、許される範囲を越えて食い違えば、fの仮定は否定されず、一応そのまま保持される。もし、許される範囲を越えて食い違えば、fの過程が誤りであるとして、m.仮説の修正ということになる。

(島田、1977、p.16)

この過程においても、あるデータが出ようともし、それが正しい値かそうでないか、また、そのデータを使った場合にも、うまくいかない場合があり、それはまたなぜか、原因を追究していきながら活動を遂行することがわかる。そして、島田(1977)は続いて次のことを説明している。

このf.条件、仮説→g.公理化→j.結論
→l.照合の過程で、最終段階が肯定的で
あれば、このgの公理系は、fに対する数
学的モデルと呼ばれ、次の段階でn.類
例の有無が検討される。(中略)類例が
いくつもある場合、その共通な特徴を
とらえて、一般化し、より基本的な命題
と副次的、ないし、従属的な命題とを区
別して体系化を図る。こうしてo.一般
理論およびその理論による処理のため
のアルゴリズムの開発に進む。この段
階では、一般理論に平行した記号法が
開発され、演繹推理が、記号の配列の変
形として進められるようアルゴリズム
を開発する。ここだけを見れば、数学は

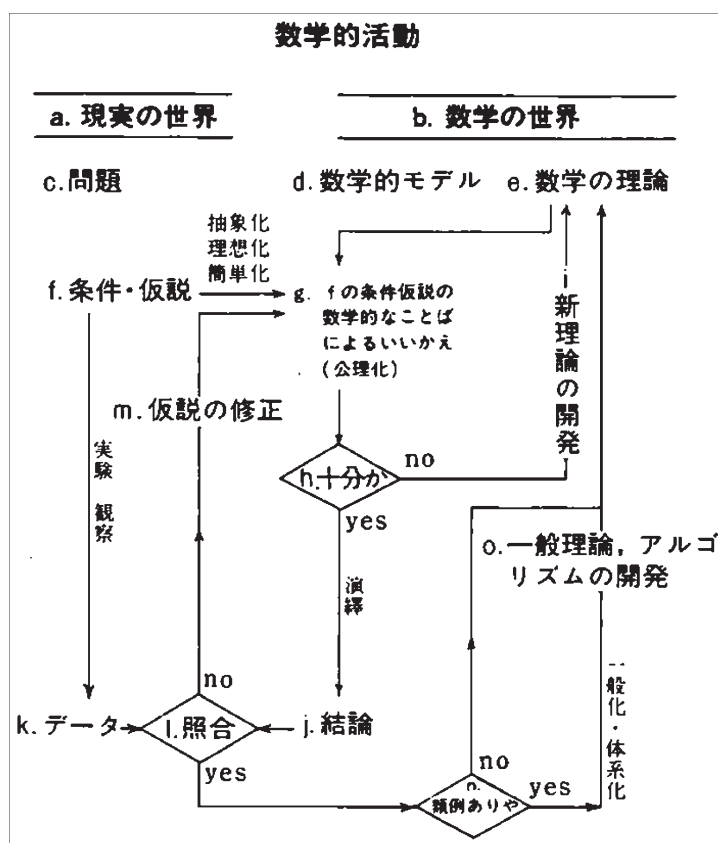


図2. 現実の世界と数学の世界 (島田、1977、p.15)

一種の記号ゲームの外観を呈する。

(島田、1977、pp.16-17)

このように、島田(1977)の数学的活動の図は、数学が創造される全体的過程の多様な側面が描かれていることがわかる。これらの過程そのものが重要であり、かつ線形的に進むのではなく力動的に進むことが大切である。

ここまで、島田(1977)の図についての説明を述べてきた。数学的活動は、現実の世界の問題を数学的モデルとして設定し、演繹的に確かめ、それが正しい結論であれば、一般理論、さらには、数学の世界で進展していくことを意味していた。さて、この一連の活動について、実際にトレースしていく。島田(1977)の事例にある「水槽の問題」を取りあげた。

IV. 本研究の具体的取り組み

1. 具体的な実践事例「水槽の問題」

島田(1977)は、水槽の問題を一つの展開例として初めに示している。問題は以下の通りである。

プラスチック(透明体)のできた直方体の容器に、

水が途中まではいっています。この容器を、底面の一边を固定して傾けると、傾きに応じて、水面で限られたいろいろな部分の形や大きさが変わってきます。それらの形や大きさの間にある、いろいろななまりをできるだけたくさん見つけなさい。

それでは、この問題を実際にトレースしていこう。

1) 実験に使用する水槽について

今回使用する水槽は、透明の概形が直方体の

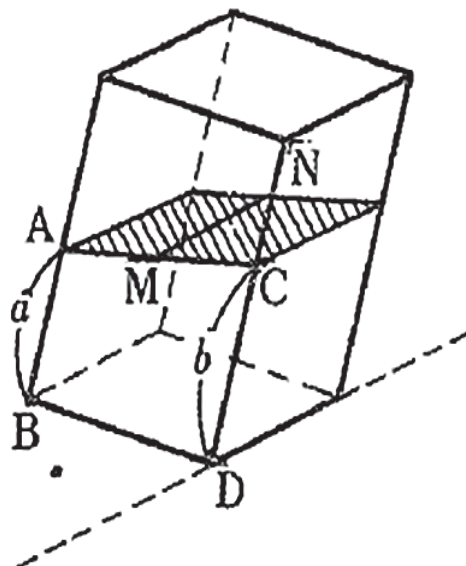


図3. 水槽を傾けた図(島田、1977、p.22)

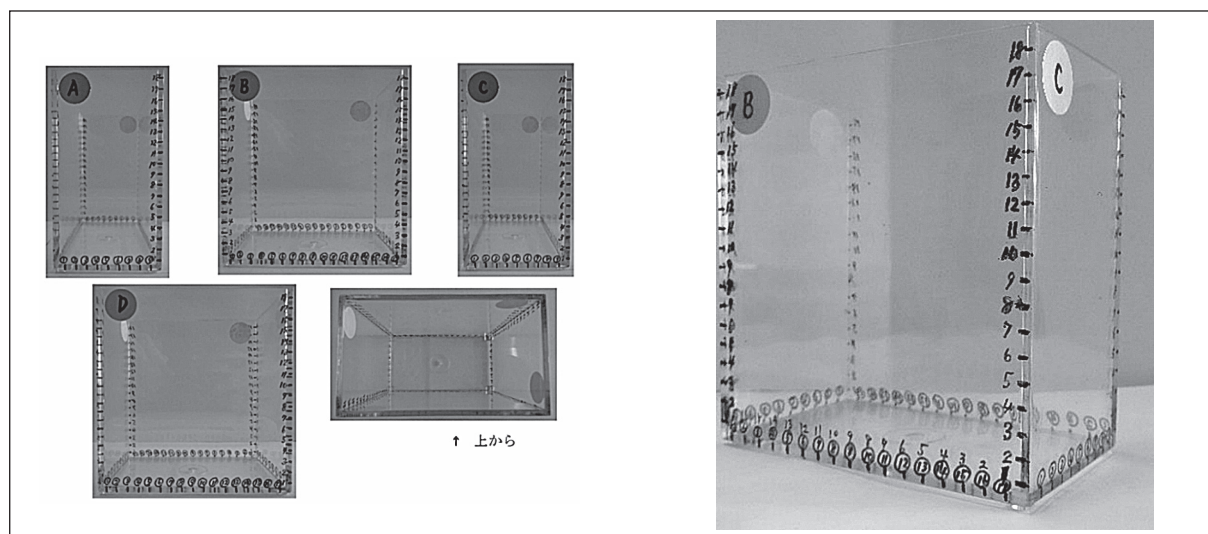


図4. 実験に使用した水槽

容器(縦×横×高さ＝約50mm×約90mm×約95mm)を水槽と見立てて使用することにした。それが、図3である。それぞれの面に、①、②、③、④と記号を入れた。また、上から見える面も加えて示している。目盛りは、5mm間隔で入れている。よって、縦10・横18・高さ19となっている。

2) 水槽に目盛り8まで水を入れて傾ける

この水槽に、目盛り8まで水を入れて傾けてみると次のようなことに気付く。その際、それぞ

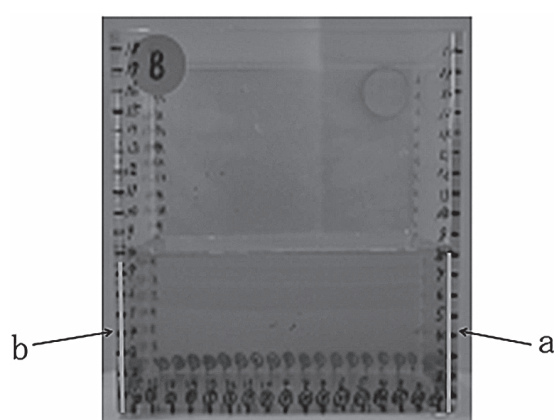


図5. 目盛り8まで入った水槽

れの辺にa、bと記号を付けることにする(図5)。

以上のように実験を通して実験結果を列挙してきた。次に、この活動が島田(1977)の述べる数学的活動とどのように関わるか考察していく。

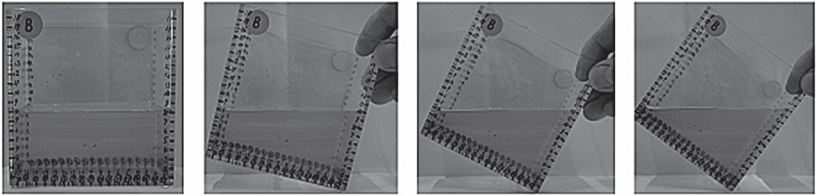
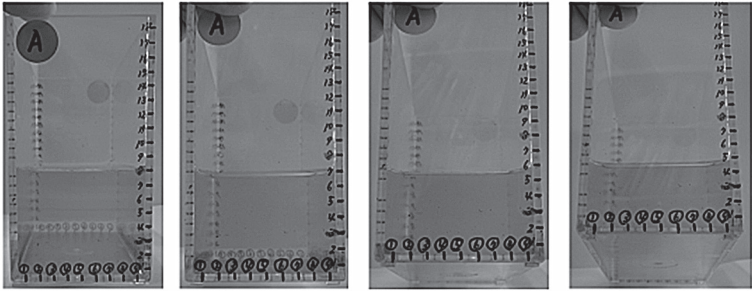
3) 一連の活動を島田(1977)の数学的活動のイメージ図で捉える

問題は前述したとおりである。その際、f.条件・仮説にあたることは、「一边を固定して傾ける」である。調べてみると次のことに気付く。それは、aとbの関係である。前述したことをさらに深めてみると、表2.のようになった。

このaとbの関係は、 $a + b$ が常に、16であるといえる(厳密にいうといえそうである)。 $a + b = 16$ 。このことは、g.f.の条件仮説の数学的な言葉によるいい換え(公理化)にあたる。また、d.数学的モデルとも捉えられる。

ここまでの過程で、実験や観察を通してk.データを取っている。次に行うべきことは、このデータとj.結論がl.照合されることである。このj.結

表1 水槽を傾けた結果

| 観点 | きまり・気付き |
|---------------|---|
| aの長さ とbの長さ | <p>aが増えると、bが減る(変化)。その反対も同様。</p>  <p>図6. 水槽を傾ける(②の面)</p> <p>aは、こぼれてしまうため、高さの19を超えない(変域)。</p> |
| 見える形・面積 | <p>①から見える形: 長方形が徐々に小さくなる。</p>  <p>図7. 水槽を傾ける(①の面)</p> |

⑧から見える形：傾けていくと台形が見える。次第に、直角三角形になる ($b=0$ になった場合)。

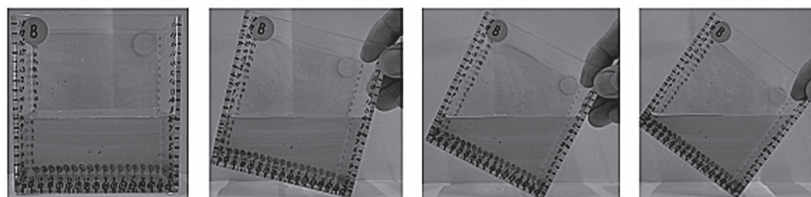


図6. 再掲

③から見える形：長方形が徐々に大きくなる (対称な面、④と逆になっている)。

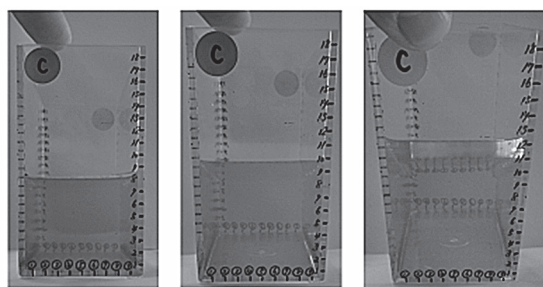


図8. 水槽を傾ける (③の面)

上から見える形：長方形。

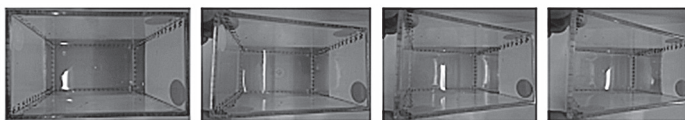


図9. 水槽を傾ける (上から)

その他

傾け方に関係なく、体積は一定である。

側面積は、変わらない。

傾けていくと、四角柱→台形を底面とした台形柱→三角柱に変わっていく。

⑧から見ると、定点がある (青の点が定点)。

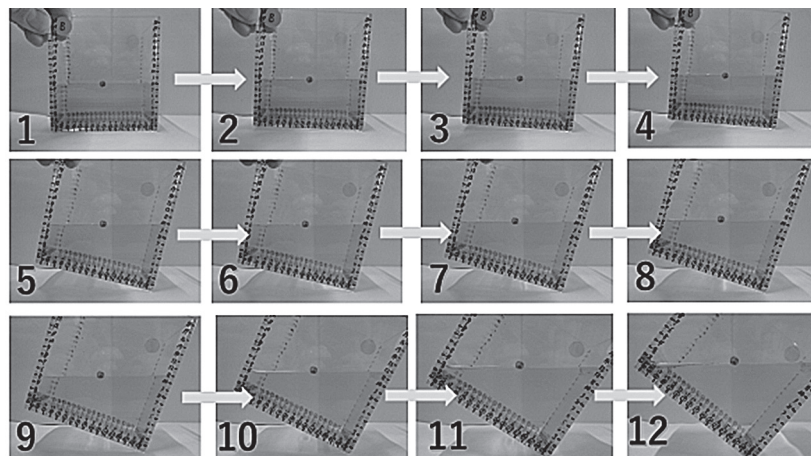


図10. 水槽を傾ける (定点)

論は島田(1977)が、「eの数学の理論からjの結論までの間が演繹論理で一貫していなければならない。」(島田、1977、p.16)と述べている通り、 $a + b = 16$ ($a + b$ が一定)であることを演繹的に説明しなければならない。

4) 「g. 公理化から j. 結論」への過程

ここで、 $a + b = 16$ というj.結論になることを演繹的に説明しておく。

まず、この水槽に入っている水は、 $10 \times 18 \times 8 = 1440$ である。傾けた際にも体積は一定であり、⑥の面を底面と捉え「台形柱」と見れば、 $(a+b) \times 18 \times \frac{1}{2} = 1440$ である。この式を変形してみると、

$$(a+b) \times 10 \times \frac{1}{2} \times 18 = 1440$$

$$(a+b) \times \frac{1}{2} \times 180 = 1440$$

$$(a+b) \times \frac{1}{2} = 8$$

$$a + b = 16$$

この結果、 $a + b = 16$ であることを結論付けることができた。これは、g. 公理化がh. 十分であることを演繹によってj. 結論を見いだすことができたことになる。この関係をo. 一般理論、e. 数学の理論として述べるならば、これは、一次関数と見ることができる。 $a + b = 16$ について、 $b = -a + 16$ であり、図11のようになるといえる。

これまで述べてきたように、ある条件が設定されている問題があり、その解決のために帰納的に考え、そして演繹的に説明し結論付け一般化を図る過程が数学的活動だと確認できた。だが、数学的活動とは、「数学的結論を受け入れた場合でも、活動はそれで停止するのではなく、さらなる発展的な活動が展開される。」⁵⁾(大谷、2002、

表2 aとbの関係

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|----|-----|----|----|----|----|
| aの目盛り | 8 | 9 | 10 | ... | 13 | 14 | 15 | 16 |
| bの目盛り | 8 | 7 | 6 | ... | 3 | 2 | 1 | 0 |

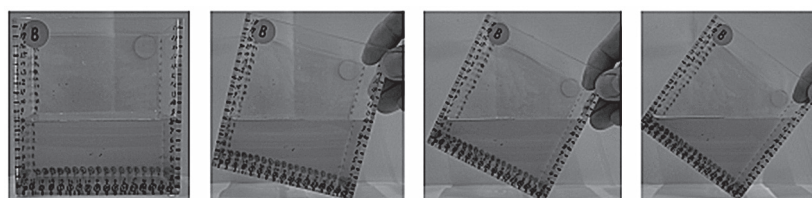


図6. 再掲

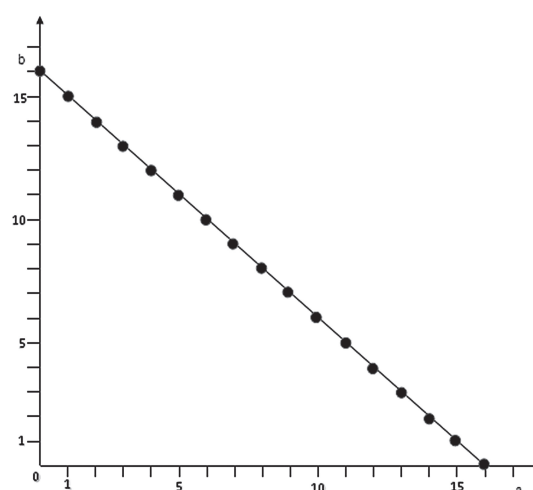


図11. $b = -a + 16$ のグラフ

p.55)と述べるようにさらに追究すべきだと捉えた。

5) 追究1(水槽に目盛り4まで入れて考える)

次に、さらに傾けていった場合を追究した。この時、傾けていけばいくほど水が溢れてしまったので、目盛りの4まで入れた場合で進めていく。そして、今度は、bが0までいき、さらに傾けた場合を考えてみる。ここでは、これまでの変域を拡張、図13に見られるように、aとcの関係を見いだしていく。

すると、表3.のような測定値を得ることができた。

この数値は、概数であるが、aとcの関係をみていくと、積が140程度になることがわかる。よって、 $a \times c \div 140$ を数学的モデルとして演繹的に考えて結論を見いだしていく必要がある。

6) 「g. 公理化から j. 結論」への過程

この公理も演繹的に説明しなければならない。目盛り4まで入れた水の体積は、 $10 \times 18 \times 4 = 720$ 。これは一定でわかっていることである。傾けた三角柱の体積は、 $a \times c \times \frac{1}{2} \times 10 = 720$ となる。式

を変形すると、

$$a \times c \times \frac{1}{2} \times 10 = 720$$

$$a \times c \times \frac{1}{2} = 72$$

$$a \times c = 144$$

この結果、 $a \times c \div 140$ という数学的モデルが、 $a \times c = 144$ であるという結論を得ることができる。この関係は、o.一般理論、e.数学の理論としては、反比例となる。

ここまで、 $a + b = 16$ 、 $a \times c = 144$ であることを数学的モデルとして、さらには、演繹的に結論付けて数学の理論として位置付けてきた。しかし、「さらなる発展的な活動」として条件を変えてさらに追究していく。

2. 追究2(f.条件・仮説を変える)

1) 「一辺を固定して傾ける」から「一点を固定して傾ける」へ

これまで述べてきたことは、条件が一辺を固定して傾ける場合であったが、今度は、条件を変えて、一点を固定して傾ける場合を考察対象とする。それは、数学的活動をさらに発展させていくことが大切だからである。補足すると、こ

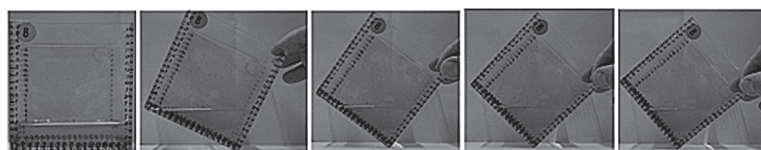


図12. 水槽を傾ける(目盛り4まで水を入れる)

表3 aとcの関係

| | | | | | | |
|-------|----|----|------|----|----|-----|
| aの目盛り | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | ... |
| cの目盛り | 16 | 14 | 12.5 | 12 | 11 | ... |

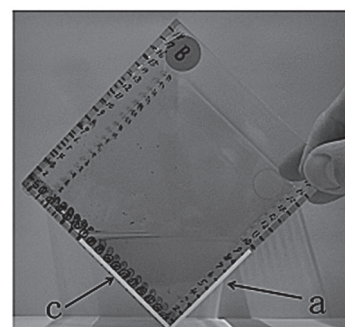


図13. aとcの位置

れまでの一辺を傾けた場合は、それぞれの高さの4つの辺の長さが変化するが、そのうち、2つの辺の長さは等しくなる(図14)。しかし、今度は、一辺から一点になるので、4つの辺の長さがそれ

ぞれ異なることになる。

図15は、一点で傾けた場合である。赤と青^{注2}のラインは、元々の目盛り8の位置と一点を固定して傾けた場合である。この条件でどんなことが

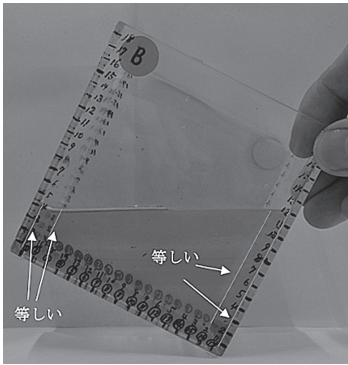


図14. 2つずつ等しい辺

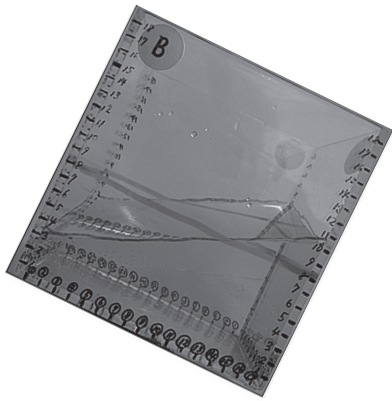


図15. 一点を固定して傾ける

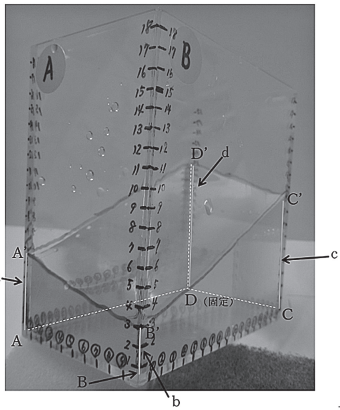


図16. ABCD-A'B'C'D'

表 4 水槽を一点で傾けた結果

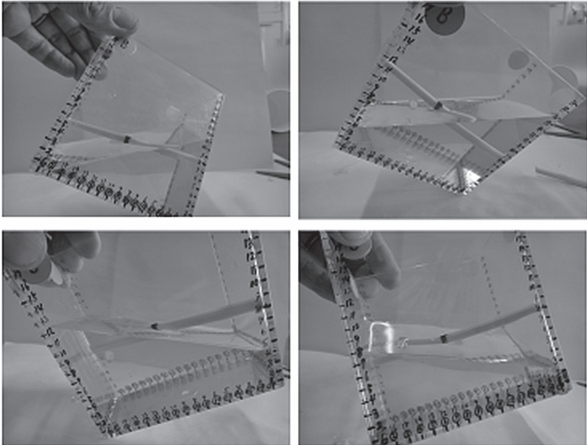
| 観点 | きまり・気付き | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|---|-------|----|----|----|---|---|-------|---|---|---|---|---|-------|---|---|----|----|----|-------|---|----|----|----|----|
| 上の面の形 | A'B'C'D'は、平行四辺形になっている（2組の辺が平行だから）。※変域については、最小の値を0とする。つまり、最も短い辺の長さが0までとなる場合で考えている。 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| abcdの長さ | <div>表 5 頂点 D 一点で傾けた場合</div> <table><tr><td>aの目盛り</td><td>8</td><td>7</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>bの目盛り</td><td>8</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>cの目盛り</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>dの目盛り</td><td>8</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr></table> <p>a+b+c+dがいつも一定である。 a+c=b+dになっている。</p> | aの目盛り | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | bの目盛り | 8 | 4 | 3 | 2 | 1 | cの目盛り | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | dの目盛り | 8 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| aの目盛り | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| bの目盛り | 8 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| cの目盛り | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| dの目盛り | 8 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| その他 | <p>A'B'C'D'の対角線の交点は、定点である。この交点をO'とする。</p> <div></div> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

図17. 水面の定点

図17. 水面の定点

えるかということであった。次は、 $a+b+c+d$ がいつでも一定であるということを説明していく。その場合、体積が一定であることに目を付けて取り組む。まずは、この体積をどのように求めるかということから述べていく。

4) $a=6$ 、 $b=3$ 、 $c=10$ 、 $d=13$ の場合で体積を求める

まず、この体積は、目盛り8までを入れた水で

実験したため、体積は、 $10 \times 18 \times 8 = 1440$ である。

そして、図21左のように傾けた場合について取り組む。図21右は、この体積を求める際に、3つの体積(下面の赤 V_1 ・上側右から、青 V_2 ・緑 V_3)に分けてそれぞれ求め、足し合わせることにする。

すると、 $V_1 \cdots 10 \times 18 \times 3 = 540$ である。

$V_2 \cdots$ 底面が台形の四角錐である。

$< \{(10-3) + (13-3) \times 10 \times \frac{1}{2}\} \times 18 \times \frac{1}{3} > = 510$

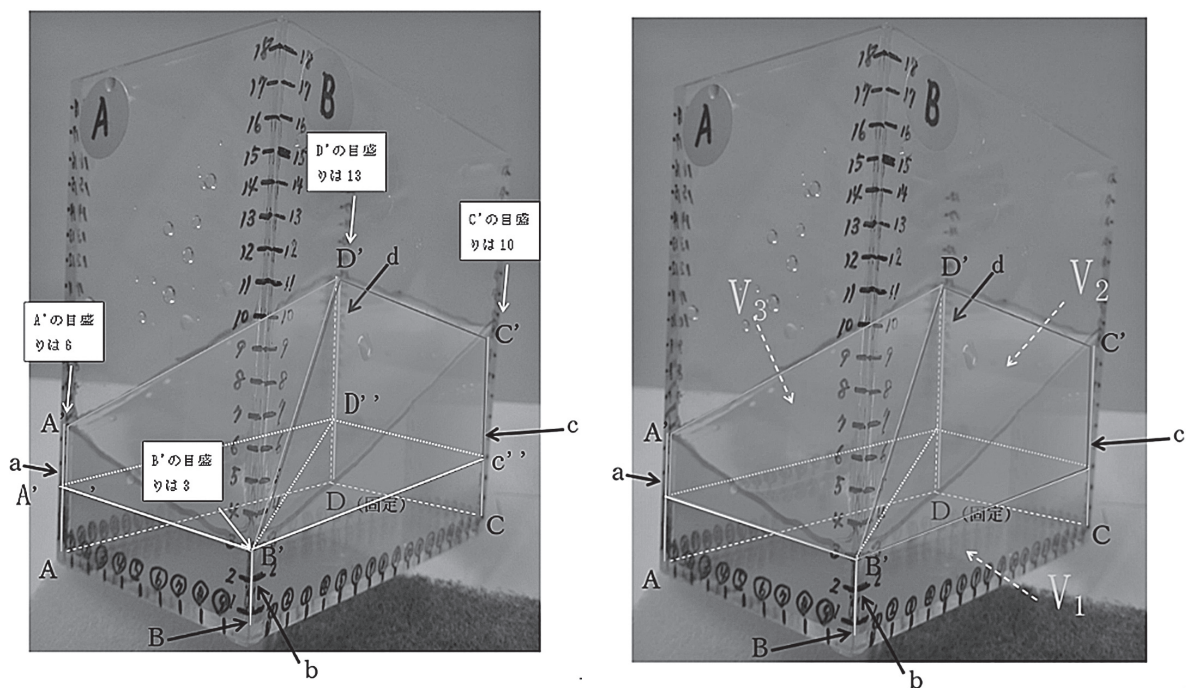


図21. $a=6$ 、 $b=3$ 、 $c=10$ 、 $d=13$ の体積

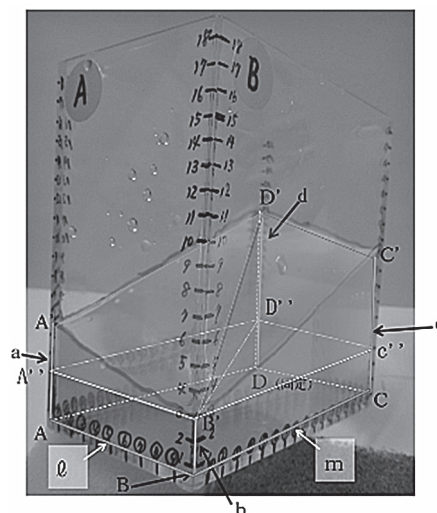


図22. $AB=l$ 、 $BC=m$ を示した図

$V_3 \cdots V_2$ と同様に考えて、

$$< \{ (6-3) + (13-3) \times 18 \times \frac{1}{2} \} \times 10 \times \frac{1}{3} > = 390$$

上記のように、 $V_1 V_2 V_3$ は、 $540 + 510 + 390 = 1440$ となり、体積は変わらないことがわかる。このことを、文字を用いて一般化を図る。

5) 文字を用いて体積を求める

ここで説明をしやすくするために、 $AB = \ell$ 、 $BC = m$ として進める(図22)。

$$V_1 \cdots \ell \times m \times b = \ell m b$$

$$V_2 \cdots < \{ (c-b) + (d-b) \times \ell \times \frac{1}{2} \} \times m \times \frac{1}{3} > = \frac{1}{6} (c+d-2b) \ell m$$

$$V_3 \cdots < \{ (a-b) + (d-b) \times m \times \frac{1}{2} \} \times \ell \times \frac{1}{3} > = \frac{1}{6} (a+d-2b) \ell m$$

$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{6} (a+c+2b+2d) \ell m$ となる。この一般式から次のことが説明できる。

2)では、 $a+c = b+d$ であることを述べた。このこと(定理)を活用すると、次の2つのことがいえる。それは、

$$\text{i) } V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{6} (\underline{a+c} + 2b + 2d) \ell m = \frac{1}{6} (\underline{b+d} + 2b + 2d) \ell m = \frac{1}{6} (3b + 3d) \ell m$$

$$\text{ii) } V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{6} (a + c + \underline{2b+2d}) \ell m = \frac{1}{6} (a + c + \underline{2a+2c}) \ell m = \frac{1}{6} (3a + 3c) \ell m$$

i)とii)は文字は異なるが、この傾けた場合の体積を求める式を表している。さらに簡約すると、

$$\text{i) } \frac{1}{6} (3b + 3d) \ell m = \frac{1}{2} (b + d) \ell m$$

$$\text{ii) } \frac{1}{6} (3a + 3c) \ell m = \frac{1}{2} (a + c) \ell m$$

と表すことができる。このことから、 $a+c = b+d$ はいつでも一定であるから、 $a+b+c+d$ も、いつでも一定であるといえる。体積が一定であることから、このように演繹的に説明することができる。そして、これらは、 a, b, c, d の変域が0以上16以下であること(目盛り8の場合)に限定されることを付け加えておく。そう捉えたと、体積が一定という条件、それともう一つ、底面積、 ℓm (図22)が一定という2つの条件のもとに数学の理論がつくられていることがいえる。

6) 活動を島田(1977)の数学的活動のモデルで捉え直す

「一辺を固定」して傾けた場合から、「一点を固定」して傾けた場合に取り組んだ。これは、島田(1977)のf条件を変えてみることから出発している。そして、例えば $a+c = b+d$ という数学的モデルがなぜそのように結論付けられるのか、そのことを演繹的に説明したり、k.データと照合したりする過程があったと振り返ることができる。

さらに、式を変形していくと、O.一般理論では、傾けた体積は、変域には依存するが、 $\frac{1}{2}(b+d) \ell m$ 、あるいは、 $\frac{1}{2}(a+c) \ell m$ だといえた。これは、一辺を固定して傾けた場合の特殊な場合から、拡張した形で得られたと判断できる。つまり、この公式を用いれば、一辺を固定した場合にも適用できるのである。

V. まとめと今後の取り組みに向けた課題

今回は、水槽の問題に実際にトレースし数学的活動の意味について追究した。この活動を通して、数学がつくられていく過程の中でどのように活動を進めていくべきか見いだすことができた。特に、帰納的に考えることから演繹的に説明する過程が重要であった。

また、数学的モデルをつくり、数学の理論へと導く過程も重要であり、洗練されていく活動も見いだすことができた。その際、筆者も式のもつすばらしさも味わうことができた。大きな枠組みとして、数学的活動を遂行する中で大切なことは次の点である。

それは、実際の算数指導では、例えば1時間の授業の中で学習のまとめがあり終わってしまう。これは、いわゆる「一話完結型」の学習になっている。指導者は、そればかりではないという意識を持つべきである。

つまり、問題解決が終わったら、それで終わるのではなく、見いだされた結果に対して妥当性を検討したり、新たな問題を発見したりする活動が求められるということである。数学的活動のもつ意味としてこのことが考えられる。

そして、課題は次の点である。この数学的活動は、これからの算数・数学教育で一層大切にされるべき活動であり、日々の授業で実践されていくことが重要である。そのために、平常の授業のどの題材でどのように仕組むのか、具体的な実践研究が大切である。現場の具体的実践と理論を結び付けていくことが今後の大きな課題である。

注

- ^{注1} 文部科学省(2018)p.33には、数学的活動について『事象を数理的に捉え、算数の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行することである。』と示されている。
- ^{注2} 赤や青、その後も色が出てくるが、ここでの実験を理解しやすくするために、色で示した。印刷時はカラーではないので、その点についてはご容赦願いたい。なお、必要であれば、カラー印刷した文書を個人的にお渡しすることは可能である。

文献

- ¹⁾ 文部科学省、『小学校学習指導要領解説 算数編』, 東京, 日本: 東洋館出版社, (2008).
- ²⁾ 文部科学省, 『小学校学習指導要領(平成29年告示)解説 算数編』, 大阪, 日本: 日本文教出版, (2018).
- ³⁾ 島田茂(編), 『算数・数学科のオープンエンド アプローチ 授業改善への新しい提案』, 東京, 日本: みずうみ書房, (1977).
- ⁴⁾ 島田茂(編), 『[新訂]算数・数学科のオープンエンド アプローチ 授業改善への新しい提案』, 東京, 日本: 東洋館出版社, (1995).
- ⁵⁾ 大谷実, 『学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成』, 東京, 日本: 風間書房, (2002).
- ⁶⁾ 能田伸彦, 『算数・数学科 オープン アプローチによる指導の研究 ―授業の構造と評価―』, 東京, 日本: 東洋館出版社, pp.76-80 (1983).
- ⁷⁾ 橋本吉彦, 『算数教育原論』, 東京, 日本: 東洋館出版社, pp.54-57 (2009).