

論文

有理数の乗除計算に関する研究

佐藤 茂太郎

A Study on Multiplication and Division of the Rational Numbers

SATO Shigetaro

要 旨

本稿の目的は、小学校第6学年の27名の児童を対象にして授業実践をし、有理数の分数表示の乗除計算における「計算の方法(計算の仕方)」に関して、指導上の問題点を見だし、それらの改善案を図り、どのような指導が適切であるか考察し論じたものである。改善案としては、抽象的な記号の世界で解決すること、構造化された知識体系をつくること、式と図的な解釈を関連付けることといった3つの視点から迫った。全15時間の授業結果として、計算の仕方について、抽象的な記号の世界での解決、二重数直線と関連付けながら式の意味を説明するといった活動が、徐々に児童自らできるようになってきたことから、改善案の有効性が見いだされた。

キーワード

計算の仕方 分数の乗除計算 抽象的な記号の世界 知識の構造化 二重数直線

目 次

- I. はじめに
- II. 本研究の目的と方法
- III. 本研究の立場
- IV. 授業の実際
- V. 結果並びに考察、今後に残された課題

注

文献

I. はじめに

小学校における計算指導は、大きく「意味(演算決定)」を理解させる指導と「計算方法」を理解させる指導の2つに分けられる¹⁾。本稿では、2つ目の「計算方法」(計算の仕方と同義とする)について、問題点を明らかにし指導の改善を図ることが目的である。それでは、なぜこの計算方法の指導に着目したかについて説明していく。

1. 埼玉県の入間地区で実施された調査(入間地区算数数学学力調査報告書)より

埼玉県の西側に位置する入間地区(12市町)では毎年4月に第2学年から中学校2年の児童生徒

に学力調査が行われている。この調査は62年続き伝統ある取組である。実施校は170校で、対象者は約65000名である。各学年約10,000名が対象となる比較的大きい範囲での調査であることがわかる。

この調査から次のことがわかっている。

まず、2011年実施問題、問題番号3²⁾から見ていこう(調査の実施人数は9,440名)。

問題番号3は、分数の乗除計算における意味(演算決定)が理解されているか問う問題である。二重数直線^{註1)}で数量の関係が示されているにも関わらず、正答率49%であることがわかる。

次に、2010年実施問題、問題番号5³⁾を見てみる(調査の実施人数は9,372名)。

問題番号5では、吹き出しにヒントはあるもの

問題番号3 $\frac{2}{5}$ mの重さが、 $\frac{5}{6}$ kgの鉄の棒があります。この鉄の棒1mの重さを□kgとして、□を使った式に表しました。どの式になるか㉠～㉤の中から選びましょう。

㉠ $\square \times \frac{2}{5} = \frac{5}{6}$ ㉡ $\square \times \frac{5}{6} = \frac{2}{5}$ ㉢ $\square \div \frac{2}{5} = \frac{5}{6}$ ㉣ $\square \div \frac{5}{6} = \frac{2}{5}$

(2011年度実施 正答率49%)

問題番号5 みどりさんは、 $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ の計算のしかたを次のように考えました。□にあてはまる数を書きましょう。(□には同じ数が入ります。)

$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = (\frac{2}{5} \times \square) \div (\frac{3}{4} \times \square)$

みどりさんのイラスト

わる数を整数にすれば計算できるから、「わられる数とわる数に同じ数をかけても商は変わらない」というわり算のきまりを使って考えました。

(2010年度実施 正答率29%)

の正答率は29%と芳しくない結果になっている。

さらに、2012年実施問題、問題番号3⁴⁾を見ていく(調査の実施人数は9,617名)。

この正答率は41%である。これは、前出の2010年度実施問題と同様のケースの問題として出題された。問題には、わり算の性質を使うことや、□には同じ数が入ること、さらにわる数を1にすることが示されていることから比較的正答を導きやすく工夫していることがわかる。しかしながら、それでも、4割程度の正答率である。

これらの結果から、児童は、有理数の分数表示における乗除計算の意味の理解について困難なことが確認できる。端的に述べるならば、正しく演算決定ができない。もう1つが、児童は、分数の除法における計算の仕方の、公式化された根拠が説明できないことが言える。

本来であれば、意味(演算決定)と計算方法の2つについての議論を含め述べていくべきであるが、今回は計算方法の指導に着眼点を当て、問題点を見だし、その改善案を示し実践を踏まえた形で述べていく。

2. 計算方法における一般的な指導の問題点

計算方法は、一般的に「計算ができる」技能面に目が向けられる。しかしながら、算数・数学教育という視点だけでなく、教科横断的に結果だけでなく学習過程の重視が叫ばれている^{注2)}。つまり、分数の乗除計算であれば、「なぜ、分数のかけ算は、分母同士分子同士かけて結果を求めることができるか。」「なぜ、分数のわり算は、わる数を逆数にしてかけるのか。」という根拠を述べていく過程に価値を置くということである。

これは、今から何十年も前から言われ、一般的な指導に活用される文部科学省検定済み教科書⁵⁾にも反映されつつある。しかしながら、教科書を使用しただけでは児童の既知を活用して問題解決を図ることが困難な場合があると捉えることができる。つまり、ある学年では α という指導をするが、ある学年では β という指導を展開していると言えるのである。児童にとっては、問題解決を図るときに α 、 β 、時には γ までの方法が出てくるので混同してしまう。結果として理解まで進まない現状がある。このことについては、Ⅲの本研究の立場ではそれらのことを詳

問題番号3 たつやさんは、 $\frac{1}{3} \div \frac{3}{4}$ の計算のしかたを、次のように考えました。□にあて

はまる数を書きましょう。(□には同じ数が入ります。)

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3} \quad \div \quad \frac{3}{4} \\ \downarrow \times \square \quad \downarrow \times \square \\ = \left(\frac{1}{3} \times \square \right) \div \left(\frac{3}{4} \times \square \right) \\ \\ = \left(\frac{1}{3} \times \square \right) \div 1 \end{array}$$

たつやさんの
イラスト

ぼくは、『わられる数とわる数に同じ数をかけても商は変わらない』という、わり算の性質を使ってわる数を1にしました。

(2012年度実施 正答率41%)

しく述べていきたい。

Ⅱ. 本研究の目的と方法

1. 本研究の目的は、これまで述べてきた問題点をいかにして改善するかということである。その改善策については、Ⅲの中で述べる3つの研究の立場を具体的な教授場面で取り入れることである。さらに、取り入れた研究の立場はどのようにして実践可能にするのか、あるいは可能ではないのか等について吟味しさらなる指導方法を確立することである。
2. 本研究の方法は、分数の乗法・除法の授業において、全15時間を埼玉県所沢市内にある公立小学校で実施して、1台のビデオカメラと1台のICレコーダー、児童のノートのコピーを利用して分析している。特に、ノートコピー、授業中の児童の発言プロトコルを利用している。

Ⅲ. 本研究の立場

1. 抽象的な記号の世界における問題解決(Ⅲ-1)

伊藤(2011)⁶⁾は、次の図1を用いて、計算の意味(演算決定)と計算方法について説明している。「事柄を単純化し見通しやすくするため、図式化して基本的な考えを表現する。次の図のように、「意味(演算決定)」は具体的な事象の世界において生じた数量関係についての解釈であり、そこで必要とされる数や式を用いた「計算方法」は、抽象化された記号の世界における操作である。もちろん、この両者には可逆性がある。そして、この2つの世界の間を円滑に橋渡しする手段・道具として、図・半具体物や数直線などが利用できる。」である。

この立場によって実践を試みる。このことから、以下の点が一般的な指導の問題点として捉えることができる。例えば、「 $\frac{3}{4}$ dLのペンキで板を $\frac{2}{5}$ m²塗ることができる。では、1dLでは何m²のペンキで塗ることができるか。」($\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$)の具体的な場面において確かめてみよう。

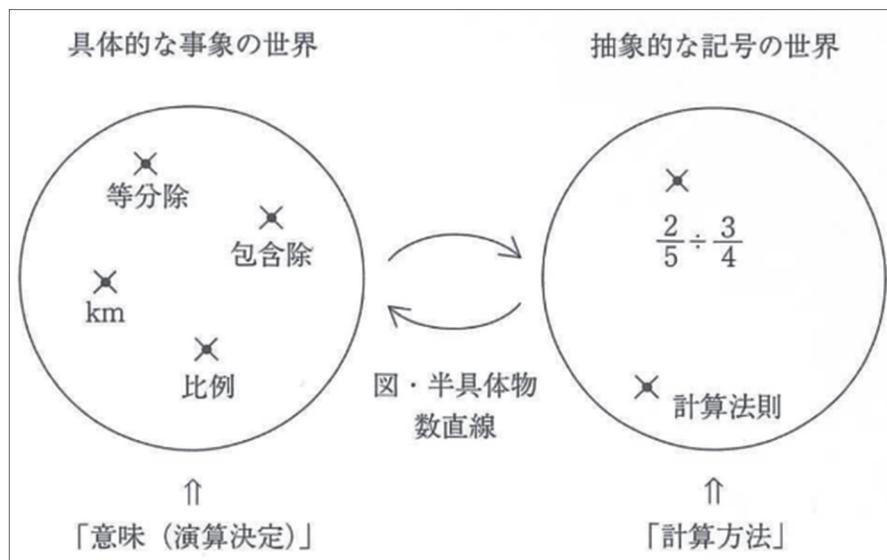


図1. 具体的な事象の世界と抽象的な記号の世界の図 伊藤(2011)⁷⁾

まず、抽象的な記号の世界では次のように解決することができる。 $\square \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$ 、 $\square = \frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ 、 $\square = \frac{8}{15}$ この結果が正しいと言うためには、逆算によって確かめることができる。つまり、 $\frac{8}{15} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$ である。これらの乗除の場面において、抽象的な記号の世界では可逆性があると言える。また、この場面を二重数直線に示すと次のようになる。 $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = (\frac{2}{5} \times 4) \div (\frac{3}{4} \times 4) = (\frac{2}{5} \times 4) \div 3 = \frac{2 \times 4}{5 \times 3}$ と解決できるので図2ようになる。

この二重数直線での解決も先ほどの抽象的な記号の世界の解決と同様、可逆性があると言える。ところが、次のような解決方法ではどうなるのだろうか、面積図で解決する考え方を図3^{注3}に示す。

図3の考え方は、 $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$ の解決過程を表している。図3の右図では、 $\frac{1}{4}$ dL当たりの面積 $\frac{2}{15}$ m²を求め、その4つ分として $\frac{8}{15}$ m²を求めている。次に、逆算の関係に当たる $\frac{8}{15} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$ はどうなるのか確かめてみよう。それが図4である。初めに1dLで $\frac{8}{15}$ m²塗れるペンキがあり、その $\frac{3}{4}$ dLに当たる量なので、 $\frac{8}{15} \times \frac{3}{4} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$ となっていることが分かる。

この2つの図3と図4を見ると可逆性がないことが言える。さらに、図3の解決方法は、次のような問題点が含まれていることを見逃すことができない。抽象的な記号の世界で表現すると、 $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \div (\frac{1}{4} \times 3) = (\frac{2}{5} \div 3) \div \frac{1}{4} = \frac{2}{5} \div 3 \times 4$ となる。ところが、「 $\div \frac{1}{4}$ 」が「 $\times 4$ 」は未知の学習内容であるため解決できない。よって、先に挙げた

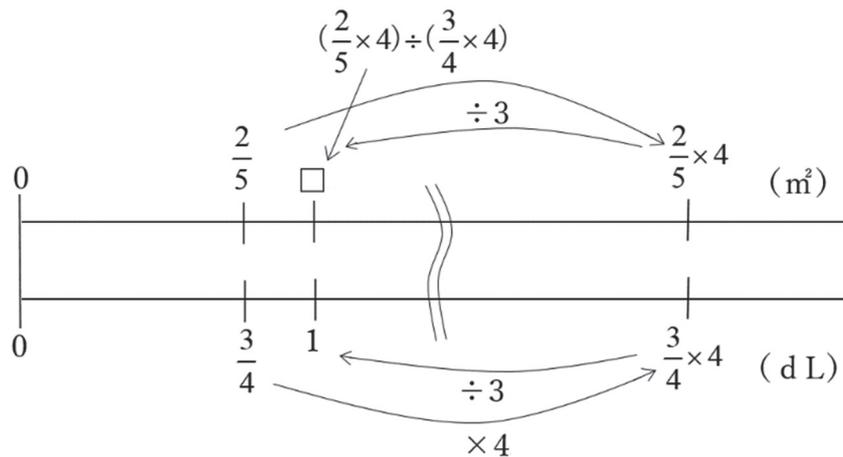


図2. $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ の二重数直線での解決

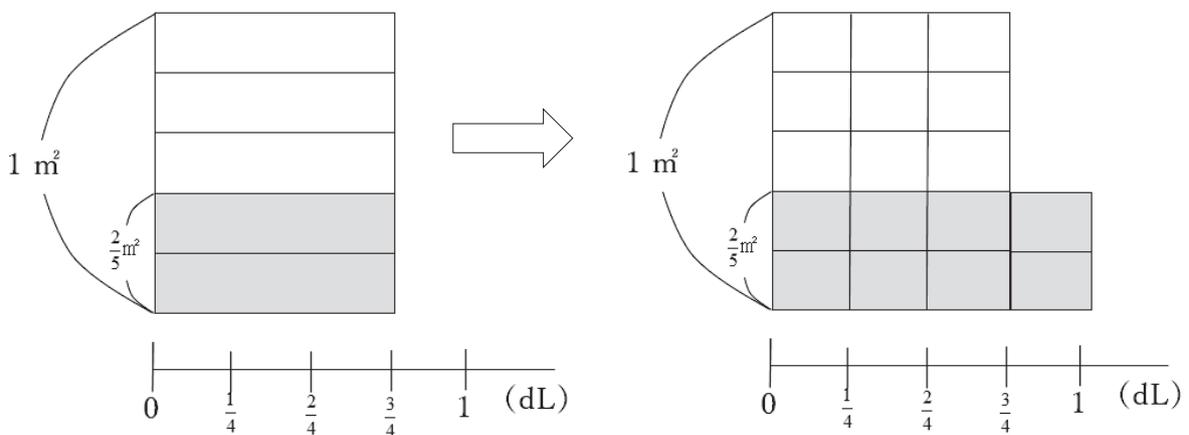


図3. $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$ の面積図での解決

図1の2つの世界の架け橋の図のみで解決していることになる。つまり、この考え方では、抽象的な記号の世界では解決できないと言える。

2. 構造化された知識体系の重要性 (Ⅲ-2)

伊藤(2004)⁸⁾は『問題を解決しようとする、自らの既存の知識群の中から関連がありそうなもの、解決に役立ちそうなものを次々と想起し、それらを組み合わせて何とか解決へとこぎ着けようとする。その活動によって、新しい内容は既存のものの中にうまく組み込まれ、新たな「よく構造化する知識」へと変容する。』と問題解決の説明として述べている。

筆者も、この立場を採り、児童が問題解決を図る上での理論として位置付けることにする。図5は知識体系を表した図である。既存の知識体系と未知の事柄を関連付けて構造化された知識体系を構築するというイメージができる。結果を導いていく過程、すなわち統合的・発展的な過程としても捉えることができる。右側は、「よく構造化された知識体系」になっていることがわかる。

3. 図的な解釈(二重数直線)の活用 (Ⅲ-3)

抽象的な記号だけでは児童にとって実感を伴った理解がしにくい。そこで、二重数直線を使って抽象的な記号と図を関連付けて何をどの

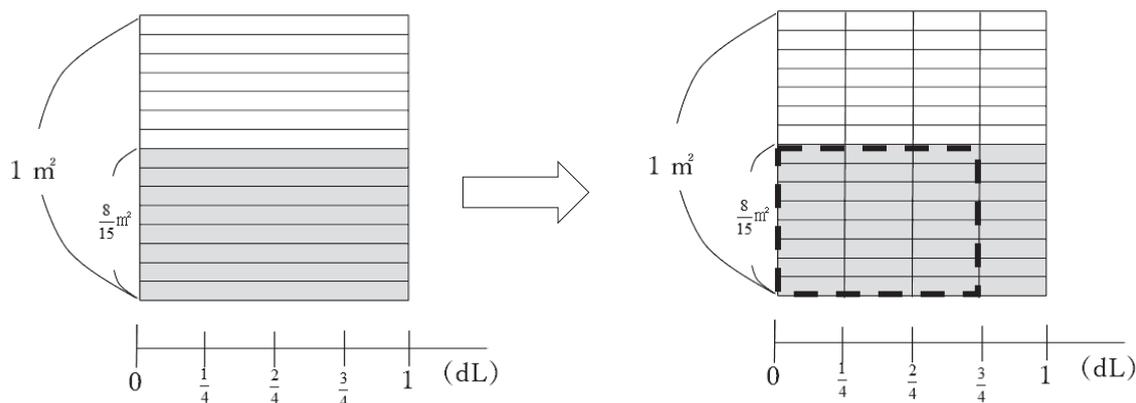


図4. $\frac{8}{15} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$ の面積図での解決

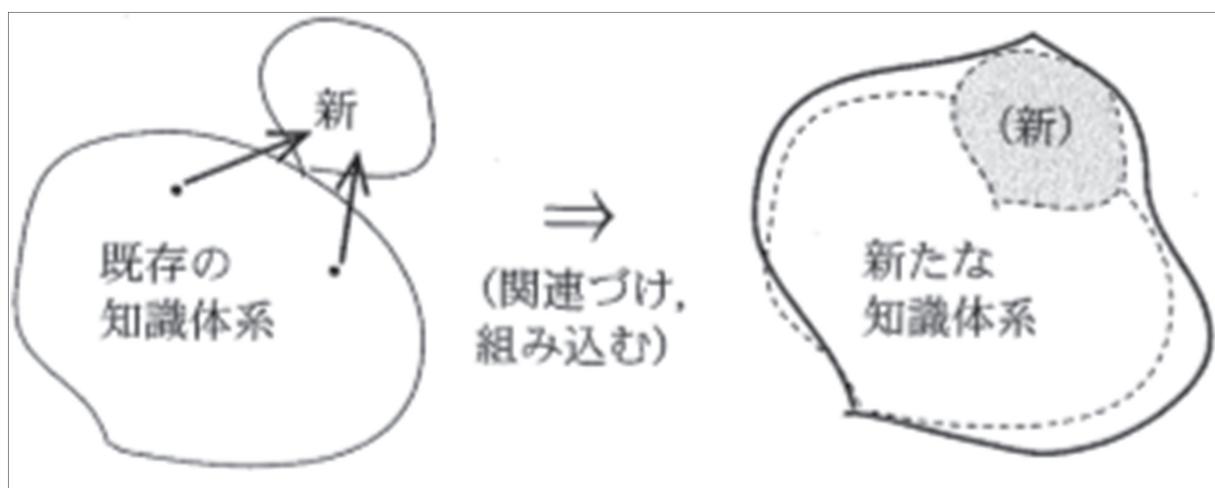


図5. 構造化された知識体系 伊藤(2004)⁹⁾

ように計算しているのか理解しやすくしていく。この指導原理はブルーナー(1966)¹⁰⁾の理論である。ブルーナー(1966)は、「すべての観念、問題、一群の知識は、あらゆる学習者が、それを認識しやすい形で理解することができるように、極めて単純な形で提示することができる。」として、さらに、活動的表象(enactive representation)、映像的表象(iconic representation)、象徴的表象(symbolic representation)といった3つの表象を挙げている。このことと関連し、式と図(ここでは二重数直線の活用)を意識させる指導を取り入れていく。

これらⅢ-1~3までの研究の立場を改善策と捉えⅣからの授業に生かすようにした。

IV. 授業の実際

1. 研究対象の小学校及び日時

日時：2018年6月2日から6月24日までの45分×15時間。(本稿は、第2時と第3時を中心に述べている。)

場所：埼玉県所沢市内小学校

対象：第6学年児童27名。習熟度別学習^{注4)}を実施しており、基礎・標準・発展コースのうち発展コースの児童が対象である。

授業者：筆者

2. 分数の乗法 第2時の概要

この時間の問題としては、第1時の続き「1mの重さが $\frac{3}{4}$ kgのホースがあります。このホース $\frac{3}{5}$ mの重さは、何kgですか。」である。前時では、 $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5}$ でもよい理由について考え確認している。本時は、 $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5}$ の計算の仕方を考える場面である。

習熟度別学習の発展コースの児童は既に公式を知っており^{注5)}、分母同士分子同士をかけてから答えを求めていたので、一時的にその結果のみ確認をした。その後、「なぜ、分母同士分子同士かけるのか」その根拠を述べていくことが、本時の課題であることを確認する。その後、再度自力解決の時間を設けている。

解決方法は大きく2つであった。1つは、小数にして解決する方法： $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = 0.75 \times 0.6 = 0.45 = \frac{9}{20}$ 、もう1つは、単位分数当たりの大きさを求めそのいくつ分として求める方法： $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times (\frac{1}{5} \times 3) = \frac{3}{4} \div 5 \times 3$ である。図6はその方法を表した図である。

このことについては、Ⅲ-3で既に指摘してきたことである。抽象的な記号の世界の説明が可能かどうか議論することを、授業者から学習者へ伝達した展開になった。本来は、児童からこの推論の正しさを正当化できないことを示してほしかったが、今回はそのような児童がいなかったため教師主導とならざるを得なかった。その場面が表1である。TとCのやり取りから、児童

表1 抽象的な記号の世界の解決に移行させるための教師と児童の発話記録

- | | |
|---|--|
| T | 今日、2つの考え方でできましたね。さっき質問が出ていましたね。 $\times \frac{1}{5}$ $\div 5$ になることでした。このことは図で説明できましたね。納得していましたね。でもさ、 $\frac{1}{5}$ が $\div 5$ って、式では説明できていない。 |
| C | 確かに…。 |
| T | 次の時間は式でこれまで学習したことを使って説明ができるように考えていきましょう。 |

は教師は、一体何を求めているか理解することが困難であることが見受けられる。Cの「確かに…」という発言は、教師が何を指摘しているのか、何が可謬であるのか理解していないものと推測できる。

ここまでで、第2時を終える形になった。次時はさらに算数・数学の事象での解決を追究する時間である。

3. 分数の乗法 第3時の概要

この時間は、前時の続きとなる。計算の仕方についてさらに追究することが課題となるため、教師から「算数の世界^{註6}で説明する」ことを目的とすることを指示した。この流れで児童らは解決を実施しようとするが、なかなか解決できない。

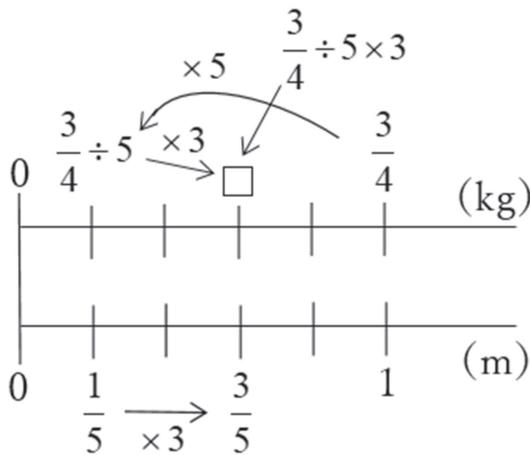


図 6. 単位分数当たりから考える方法

そこで、解決できない場合にこれまでどのようにして問題解決してきたか発問することにした。しかしながら、それでも反応がない状況であった。そのため教師から「分数のかけ算の学習ですが、みんなは5年生の時にどんな学習をしてきますか。」と発問し、既知を活用して問題解決を図るように働きかけた。すると、児童から小数のかけ算の学習での解決を想起した。このことから問題解決につながっていった。

1つ目の解決方法は、小数表示にして $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times 0.6 = \frac{3}{4} \times (0.6 \times 5) \div 5$ とする考え方である。このことは、乗法における結合法則を用いていることが分かる。もう1つの解決方法は、分数表示のまま結合法則を用いる方法である。つまり、 $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times (\frac{3}{5} \times 5) \div 5$ である。これら2つの解決方法は、どちらも第5学年の時に活用した乗法の結合法則を使っている方法であり、正当化できる。

さらに、 $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times (\frac{3}{5} \times 5) \div 5$ の解決方法を導入で活用した二重数直線で説明を促すようにした。図7左上にあるように、比例関係を矢印で示し式の操作と図を関連付けながら説明する児童が現れた。

V. 結果並びに考察、今後に残された課題

本実践は、Ⅲの3つの立場をもとに改善案を設

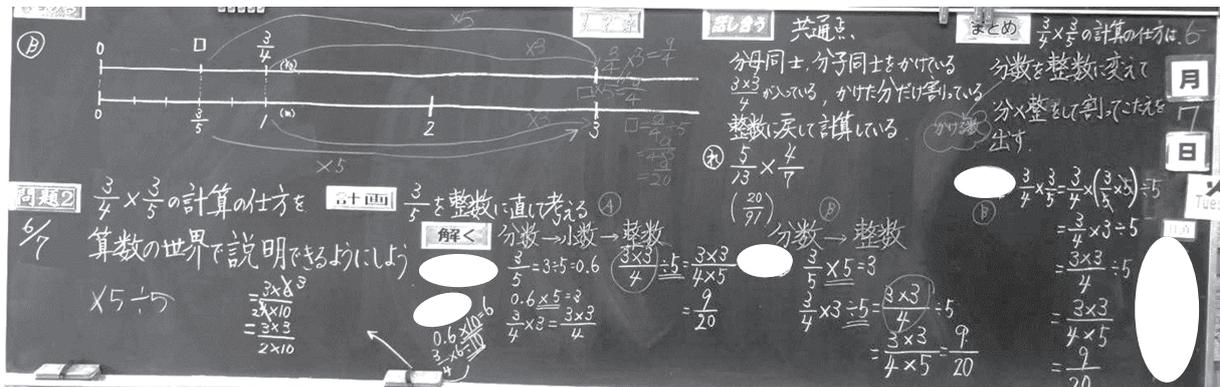


図 7. 第3時の板書写真

定し、研究を進めてきた。ここでは、この立場がどの程度児童にとって価値があることだったかという結果をそれぞれ示していく。また、考察も同様に示していく。

1. Ⅲ-1に関連して

伊藤(2011)が指摘しているように、具体的な事象の世界と抽象的な記号の世界との行き来を考えた場合、児童の思考としては、まず単位分数当たりの大きさを求めその幾つ分として考える方法が、自然な思考だと捉えることができる。ただ、教師が抽象的な記号の世界での解決までを考えることが算数・数学では大切なことであることを児童らに伝えてきた。その影響で児童の考えの中から、その大切さに気付いていることが示唆される記述も見受けられた。

単元末のノート記述で「今までに習ったわり算のきまりや交換法則、分配法則、結合法則などを使ってやっていた。(中略)算数の世界にもとづいて学習を進めていたので自分の考えをもって学習にとりくめた。」計算法則に則った形で計算の仕方を説明すること、正当化することの意味について理解を示している記述と言える。これは、本実践での改善案が、一部分ではあるが成果として見えているところである。

2. Ⅲ-2に関連して

第3時においてそのことが顕著に表れた。それは、小数表示にして $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times 0.6 = \frac{3}{4} \times (0.6 \times 5) \div 5$ とする考え方が見いだされたことである。このことは、乗法における結合法則を用いている。そして、もう1つの解決方法、 $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times (\frac{3}{5} \times 5) \div 5$ 、そのことに当たる。これはまさに、第5学年の知識と新しい問題とが関連付けられたことを示し、よく構造化された知識となっていると言える。これらは、自力解決中の児童のノート

記述から評価することができた。

今後はさらに、第5学年で学習した例えば「 80×2.3 の計算の仕方を考える」場面での指導を見直し、児童とともに有理数の分数表示の計算まで見通すことが必要になる。また、計算法則によって解決することを重視する理由、正当化できる理由についても児童とともに確認し、スパイラルに指導していく必要があることが示唆された。

3. Ⅲ-3に関連して

単元を通して指導する中で、図的な解釈によって、児童は計算の仕方と図を関連付けながら説明することができるようになってきた。成果が表れていると言える。図8は、ある児童の分数÷分数： $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ の二重数直線での説明である。単位分数当たりの大きさを求めその4つ分として考えることが、示されている。第6学年の児童にとっても説明の際に活用できる図であることがわかる。この図は、教師からの指導や支援がなくとも自ら描くことができていた。

さらに、図9においては包含除の考えの場面における二重数直線での児童による説明である。この図9を見ると分かるように、包含除の考えでは、二重から三重になり理解が困難なことが推測されるが、実際には多くの児童が、解決可能であった。このことから、式と図を関連付けなが

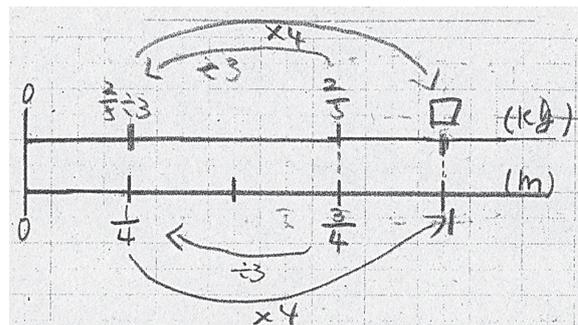


図 8. 二重数直線による $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ の計算の仕方の説明

ら指導する必要性が示唆される。

4. 今後に残された課題

授業場面において教師が介入する場面が多く見られた。これらは本来、児童自らが発言し児童同士の関わり合いの中から練り上げていくことが望ましい。このようにうまく展開できなかった理由として次のことが考えられる。

1つ目は、第5学年での有理数の小数表示の乗法と除法の学習である。この時に、「 80×2.3 」の計算の仕方を考える際、 $80 \times 2.3 = 80 \times (0.1 \times 23) = (80 \times 23) \times 0.1 = 1840 \times 0.1$ という考え方を図10のように二重数直線での解釈のみで認めていることが推測できる。教師が、抽象的な記号の世界で解決することを意識することが大切である。

2つ目は、現場での実践可能にするための指導のあり方を顕在化するために、系統的にどの学年で、どのように指導展開することが望ましいか、臨床的に検証していくことも一層大切になって

くる。その場合、事前と事後の伸びといった視点も大切に研究に取り組む必要がある。また、発展コースのみの検証となったわけであるが、他の基礎コース・標準コースの児童の計算の仕方についての説明についても検討していくことで、さらに現場実践に生かせる内容になると期待できる。

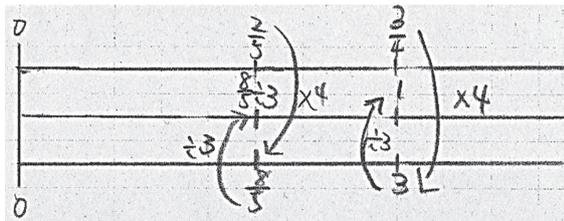


図9. 包含除の考えで $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ の計算の仕方の説明

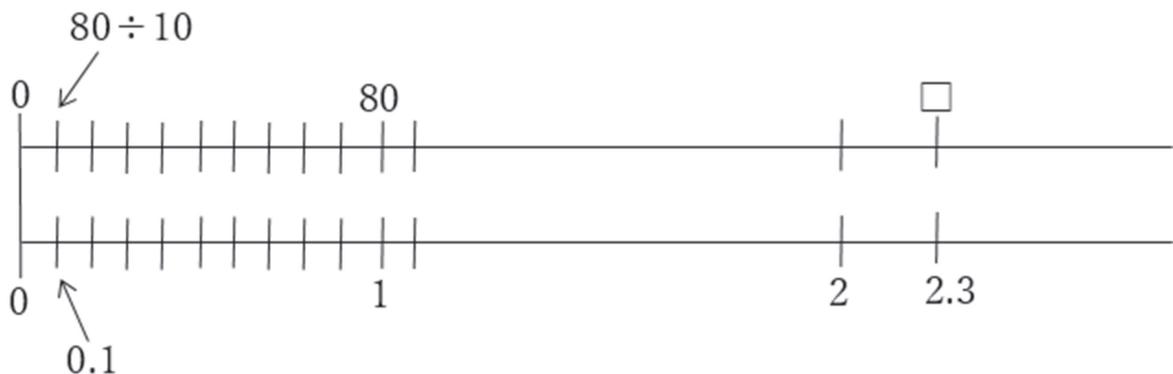


図10. 80×2.3 の計算の仕方の説明

注

- 注1 この図は、書籍によっては、様々な名称が用いられる。数直線、数直線対応図、2本の数直線、関数尺などであるが、ここでは統一して二重数直線という名称を用いることにする。
- 注2 教育課程企画特別部会 論点整理(2015) p.8には、「学びを通じた子供たちの真の理解、深い理解を促すためには、主題に対する興味を喚起して学習への動機付けを行い、目の前の問題に対しては、これまでに獲得した知識や技能だけでは必ずしも十分ではないという問題意識を生じさせ、必要となる知識や技能を獲得し、さらに試行錯誤しながら問題の解決に向けた学習活動を行い、その上で自らの学習活動を振り返って次の学びにつなげるといふ、深い学習のプロセスが重要である。また、その過程で、対話を通じて他者の考え方を吟味し取り込み、自分の考え方の適用範囲を広げることを通じて、人間性を豊かなものへと育むことが極めて重要である。」と示されている(下線部筆者)。
- 注3 この図については、藤井齊亮他41名、「新編 新しい算数6」、東京書籍株式会社、p.62(2014)を参考にしている。
- 注4 習熟度別学習を実施することについて伊藤説朗(2012)は「新しい算数研究No.494 3月号 p.106」において「教科書依存の画一・一律の授業を改め、補充コースと発展コースを新たに設けて3コース制にすることで発想を変えた指導体制を組織できる。」述べている。今回は、その考えのもと実施した。
- 注5 公立小学校であっても、公式を知っている児童は多く存在する。学習者は何のために分数の乗除計算を学習するかといったことの原因が曖昧なまま学習を進めている。事前に、レディネステストを実施して把握している。
- 注6 本稿で「算数の世界」とは、p.4の図1における右側の世界という意で捉えている。

文献

- 1) 伊藤説朗、「リーディングス 新しい算数研究 二小数・分数の計算」、東洋館出版社、pp.116-119(2011)。
- 2) 埼玉県入間地区算数数学教育研究会、「平成23年度 算数数学科学力調査報告書 第56号」、小沢写真印刷株式会社、p.34(2011)。
- 3) 埼玉県入間地区算数数学教育研究会、「平成22年度 算数数学科学力調査報告書 第55号」、小沢写真印刷株式会社、p.34(2010)。
- 4) 埼玉県入間地区算数数学教育研究会、「平成24年度 算数数学科学力調査報告書 第57号」、小沢写真印刷株式会社、p.34(2012)。
- 5) 藤井齊亮他41名、「新編 新しい算数(第1学年から第6学年)」、東京書籍株式会社、(2014)。
- 6) 再掲 1)と同じ。

- 7) 伊藤説朗、「リーディングス 新しい算数研究 二 小数・分数の計算」、東洋館出版社、p.117(2011)。
- 8) 伊藤説朗、「子どもたちが作り上げる算数 7 算数プロになるための12章」、明治図書出版、pp.18-19(2004)。
- 9) 伊藤説朗、「子どもたちが作り上げる算数 7 算数プロになるための12章」、明治図書出版、p.19(2004)。
- 10) J.Sブルーナー著 田浦・水越共訳、「教授理論の建設」、黎明書房、p.68(1966)。