

# 移入のある出生死滅過程にもとづく普及モデルによるブロードバンドサービス等契約数の分析

鈴木 尚通・田中 正敏  
葛西 和廣・成 耆政

## Diffusion Model Based on the Generalized Birth and Death Process with Immigration, and Analysis of the Number of Contracts on Broadband Service

SUZUKI Naomichi, TANAKA Masatoshi,  
KASAI Kazuhiro and SUNG Kijung

### 要 旨

我々は移入のある出生過程にもとづく普及モデルを提唱し、Bassモデルにおける革新者と追従者の定義の曖昧さが解消されることを示した。そして、工業製品の販売データの分析を行ってきた。

本稿では、移入のある出生過程に契約解除に対応する死滅過程を含めるように普及モデルを拡張し、インターネットのブロードバンドサービス契約数や移動体通信契約数の分析を行う。

### キーワード

普及モデル    確率過程    Bassモデル

### 目 次

- 1 序
- 2 一般化された移入のある出生死滅過程
- 3 確率過程に基づく普及モデル
  - 3.1 修正 Bass モデル
  - 3.2 確率論的普及モデル
- 4 データ解析
- 5 おわりに

## 1 序

ビジネス会社によって作り出された新製品やサービスを含む多くの新しいアイデアが社会に広まっていく際に、その購買者または受容者にはいくつかのパターンがあると考えられている。例えば、普及過程の先進的な研究者である Rogers は、購買者を 5 段階に分類している [1]。しかし数学的なモデルを作る際には、もっと単純化した方が扱いやすい。Bass は 1969 年に、新製品の購買者を、他の購買者とは独立に製品を採用するグループ (すなわち、革新者) と他の購買者に影響されるグループ (追従者) の 2 グループに分類したモデルを提唱した。

Bass モデルは次の微分方程式 [2, 3] で表される；

$$\frac{dF(t)}{dt} = (M - F(t))(p + qF(t)/M), \quad F(0) = 0, \quad (1)$$

$$F(t) = M \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + (q/p)e^{-(p+q)t}}. \quad (2)$$

式 (1) において、 $F(t)$  は時刻  $t$  までの販売数 (cumulative number of adopters at time  $t$ ) を表す。 $M$  は市場の潜在力 (market potential), すなわち最終的に該当製品が販売されるであろう総数を表す。また、 $M - F(t)$  は障害関数と呼ばれるが、ここでは残存する潜在的な市場の大きさを表す。係数  $p$  は coefficient of innovation を、係数  $q$  は coefficient of imitation を表す。

その後文献 [3] において、式 (1) の右辺を

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= f_1(t) + f_2(t), \\ f_1(t) &= p(M - F(t)), \quad f_2(t) = q(M - F(t))F(t)/M, \end{aligned}$$

と分解し、 $f_1(t)$  を時刻  $t$  における販売数に対する革新者の寄与、 $f_2(t)$  を追従者の寄与としている。残存する潜在的な市場の大きさ (障害関数) は潜在的な革新者と潜在的な追従者から構成されているはずである。彼らの分類では、障害関数に一定の比率  $p$  をかけたものが、任意の時刻  $t$  ( $t > 0$ ) における革新者による購買数であるとしているが、果たしてこれが正しいであろうか。関数  $f_1(t)$  の時間変化を調べてみると、

$$\frac{df_1(t)}{dt} = -p \frac{dF(t)}{dt} = -p\{f_1(t) + f_2(t)\}, \quad (3)$$

となり、それには追従者の寄与  $f_2(t)$  が含まれることになる。したがって、一般的には、 $f_1(t)$  は革新者に寄与であるとは言えないことになる。

Kendall は、出生率と死滅率が時間の任意関数であるとして、一般化された出生死滅過程を定式化した [4]。さらに、その応用の 1 例として、確率過程から得られた平均個体数の時間変動の方程式から、出生率と死滅率の時間依存性を適当にパラメータ化して、Malthus-Verhulst 方程式 (ロジスティック方程式) を導き出した。Bass モデル (1) において、 $p = 0$  とすると、Malthus-Verhulst 方程式に帰着する。

我々は、一般化された移入のある出生過程を用いて、革新者と追従者からなる普及モデルを定式化した [5, 6]。そして、移入率と出生率の比が一定となるときに、Bass モデルが我々のモデルから出てくることを示した。

本稿では、契約解除の可能性のあるデータを分析することを考慮して、死滅過程を導入し、一般化された移入のある出生死滅過程にもとづく普及モデルの定式化を試み、その結果を用いてデータの分析を行う<sup>\*1</sup>。第 2 節では一般化された移入のある出生死滅過程を概説する。第 3 節では確率過

<sup>\*1</sup> 本稿の一部は、2009 年 6 月に開催された「JOMSA 第 1 回全国研究発表大会」(於青山学院大学) と、9 月に開催された研究会「経済物理学 2009」(於京都大学) で発表された。

程に基づいた革新者と追従者による普及モデルを提唱する。第4節ではブロードバンド契約数および移動体通信サービス契約数のデータの解析を行う。そして第5節では本稿のむすびとしての考察を行う。

## 2 一般化された移入のある出生死滅過程

新製品を買ったとかあるサービスを受けている等の属性を持つ個体数(人数)の増減を分析するために、一般化された出生死滅過程を用いる。移入過程は独自の判断でその属性を得た個体(革新者)に対応し、出生過程は他の個体から影響を受けてその属性を持った個体(追従者)に対応する。また、死滅過程は解約などによってその属性を失う(または失った)個体に対応する。死滅率は問題を簡単にするために、革新者と追従者の双方に共通にとる。

以下では、一般化された移入のある出生死滅過程の概略を述べる。

$P(n, t)$  は  $n$  個の個体が時刻  $t$  ( $t \geq 0$ ) に存在する確率を表す。時刻  $t$  から  $t + \Delta t$  の時間間隔  $(t, t + \Delta t)$  に、移入によって個体数が1個増える確率は、移入率  $\lambda_0(t)$  に比例し、 $\lambda_0(t)\Delta t$  で与えられると仮定する。また、同じ時間間隔の間に、出生過程によって個体数が1個増加する確率は、時刻  $t$  における個体数  $n$  と出生率  $\lambda(t)$  に比例し、 $n\lambda(t)\Delta t$  で与えられると仮定する。さらに、死滅過程によって個体数が1個減少する確率は、時刻  $t$  における個体数  $n$  と死滅率  $\mu(t)$  に比例し、 $n\mu(t)\Delta t$  で与えられると仮定する。確率  $P(n, t)$  の時間間隔  $\Delta t$  における変化は、

$$\begin{aligned} P(n, t + \Delta t) - P(n, t) = & \lambda_0(t)\Delta t P(n-1, t) - \lambda_0(t)\Delta t P(n, t) \\ & + (n-1)\lambda(t)\Delta t P(n-1, t) - n\lambda(t)\Delta t P(n, t) \\ & + (n+1)\mu(t)\Delta t P(n+1, t) - n\mu(t)\Delta t P(n, t), \end{aligned}$$

と表すことが出来る。ただし、 $n < 0$  のとき、 $P(n, t) = 0$  とする。(4)において  $\Delta t \rightarrow 0$  の極限を取ると、確率分布に対する偏微分方程式、

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = & \lambda_0(t)P(n-1, t) - \lambda_0(t)P(n, t) \\ & + (n-1)\lambda(t)P(n-1, t) - n\lambda(t)P(n, t) \\ & + (n+1)\mu(t)P(n+1, t) - n\mu(t)P(n, t), \end{aligned} \quad (4)$$

を得る。

確率分布に対する初期条件を

$$P(n, t = 0) = 1 \quad (5)$$

とする。確率分布に対する母関数は

$$\Pi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n, t) z^n. \quad (6)$$

で定義される。(6)の両辺に  $z^n$  をかけ  $n$  について  $n = 0$  から  $n = \infty$  まで和をとると、母関数に対する偏微分方程式、

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \lambda_0(t)(z-1)\Pi + \lambda(t)z(z-1)\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \mu(t)(z-1)\frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad (7)$$

を得る。その境界条件は、(5)より、

$$\Pi(z, t = 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P(n, t = 0) z^n = 1 \quad (8)$$

で与えられる。偏微分方程式 (7) に対する補助方程式は次のようになる；

$$\frac{d\Pi}{dt} = \lambda_0(t)(z-1)\Pi, \quad (9)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\lambda(t)z(z-1) + \mu(t)(z-1). \quad (10)$$

最初に、補助方程式 (10) を解く。(10) において  $v = z - 1$  と変数変換すると、

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda(t)v^2 - (\lambda(t) - \mu(t))v$$

をうる。さらに、 $v = 1/y$  とおくと、

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(t) + (\lambda(t) - \mu(t))y \quad (11)$$

を得る。

$$y(t) = A(t)e^{\rho(t)}, \quad \rho(t) = \int_0^t (\lambda(\tau) - \mu(\tau))d\tau, \quad (12)$$

とおいて、(12) に代入すると、

$$\frac{dA}{dt} = \lambda(t)e^{-\rho(t)}$$

を得る。これより、 $A_0$  を定数として、 $A(t)$  は

$$A(t) = \int_0^t \lambda(\tau)e^{-\rho(\tau)}d\tau + A_0$$

と表すことができる。したがって、

$$y(t) = \left\{ \int_0^t \lambda(\tau)e^{-\rho(\tau)}d\tau + A_0 \right\} e^{\rho(t)}$$

と表せる。 $z = 1 + 1/y$  だから、

$$z = 1 + \frac{1}{y} = 1 + \frac{e^{-\rho(t)}}{\int_0^t \lambda(\tau)e^{-\rho(\tau)}d\tau + A_0}, \quad (13)$$

$$A_0 = \frac{e^{-\rho(t)}}{z-1} - \int_0^t \lambda(\tau)e^{-\rho(\tau)}d\tau, \quad (14)$$

を得る。

(9) を積分し、(13) を用いると次の式を得る；

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= \Pi(0) \exp \left[ \int_0^t d\tau \lambda_0(\tau) (z(\tau) - 1) \right] \\ &= \Pi(0) \exp \left[ \int_0^t d\tau \frac{\lambda_0(\tau)e^{-\rho(\tau)}}{\int_0^t \lambda(\tau')e^{-\rho(\tau')}d\tau' + A_0} \right] \end{aligned}$$

(12) より  $\Pi(0) = 1$  であるから、(14) を用いると、母関数は次の式で表される；

$$\Pi(z, t) = \exp \left[ \int_0^t d\tau \frac{(z-1)\lambda_0(\tau)e^{\rho(t)-\rho(\tau)}}{1 - (z-1) \int_\tau^t \lambda(\tau')e^{\rho(t)-\rho(\tau')}d\tau'} \right]. \quad (15)$$

確率分布  $P(n, t)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) とファクトリアル・モーメント  $F_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) は母関数から、それぞれ、次の式で与えられる；

$$P(n, t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Pi(z, t)}{\partial z^n} \Big|_{z=0}, \quad (16)$$

$$F_k = \langle n(t)(n(t) - 1) \cdots (n(t) - k + 1) \rangle = \frac{\partial^k \Pi(z, t)}{\partial z^k} \Big|_{z=1}. \quad (17)$$

(15) の両辺の対数を取り、 $t$  で偏微分すると次の式を得る；

$$\frac{\Pi'(z, t)}{\Pi(z, t)} = \int_0^t d\tau \frac{\lambda_0(\tau) e^{\rho(t)-\rho(\tau)}}{1 - (z-1) \int_\tau^t \lambda(\tau') e^{\rho(t)-\rho(\tau')} d\tau'} \quad (18)$$

$$+ \int_0^t d\tau \frac{(z-1) \lambda_0(\tau) e^{\rho(t)-\rho(\tau)} \int_\tau^t \lambda(\tau') e^{\rho(t)-\rho(\tau')} d\tau'}{\left[1 - (z-1) \int_\tau^t \lambda(\tau') e^{\rho(t)-\rho(\tau')} d\tau'\right]^2}. \quad (19)$$

ここで、 $z = 1$  とおくと、時刻  $t$  における平均個体数を得ることができる；

$$\langle n(t) \rangle = \int_0^t d\tau \lambda_0(\tau) e^{\rho(t)-\rho(\tau)}, \quad \rho(t) = \int_0^t \{\lambda(\tau) - \mu(\tau)\} b d\tau. \quad (20)$$

(19) をもう一度  $z$  で偏微分し、 $z = 1$  とおくと、次の式を得る；

$$\Pi''(1, t) - \Pi'(1, t)^2 = 2 \int_0^t d\tau \lambda_0(\tau) e^{\rho(t)-\rho(\tau)} \int_\tau^t \lambda(\tau') e^{\rho(t)-\rho(\tau')} d\tau'.$$

よって、時刻  $t$  における個体数の分散は、

$$\langle (n(t) - \langle n(t) \rangle)^2 \rangle = \langle n(t) \rangle + 2 \int_0^t d\tau \lambda_0(\tau) e^{\rho(t)-\rho(\tau)} \int_\tau^t \lambda(\tau') e^{\rho(t)-\rho(\tau')} d\tau' \quad (21)$$

と表せる。

### 3 確率過程に基づく普及モデル

前節で概説した一般化された移入のある出生死滅過程を用いて、革新者と追従者からなる普及モデルを考える。(20) から、時刻  $t$  における平均個体数に対する微分方程式、

$$\frac{d\langle n(t) \rangle}{dt} = \lambda_0(t) + \lambda_2(t) \langle n(t) \rangle, \quad \langle n(0) \rangle = 0, \quad (22)$$

$$\lambda_2(t) = \lambda(t) - \mu(t), \quad (23)$$

を得る。また、(20) を  $\lambda_2(t)$  を使って書き直すと、時刻  $t$  における個体総数の平均値、

$$\langle n(t) \rangle = \int_0^t d\tau \lambda_0(\tau) \exp\left[\int_\tau^t \lambda_2(t') dt'\right]. \quad (24)$$

を得る。

ここで、(22) の意味を考える。 $t = 0$  のとき、あるサービスが開始されるとする。そのサービスを受けるためには契約する必要があるとする。時刻  $t$  における平均個体数  $\langle n(t) \rangle$  は、あるサービスが開始されて後、時刻  $t$  ( $t > 0$ ) においてサービスを受ける契約総数を表すと考え、時間微分  $d\langle n(t) \rangle/dt$  は、時刻  $t$  における単位時間当たりの契約数の変動（増加、または減少）を表す。(22) によると、時刻  $t$  における契約数の変動は、移入率  $\lambda_0(t)$  と、出生率と死滅率の差  $\lambda_2(t) = \lambda(t) - \mu(t)$  と時刻  $t$  における契約総数の積  $\lambda_2(t) \langle n(t) \rangle$  に分解される。式 (22) 右辺第 1 項の移入率  $\lambda_0(t)$  は時間の関数ではあるが、時刻  $t$  における契約総数には依存しない。形式的には  $\lambda_0(t)$  が革新者の寄与

を表しているように見える。また、(22) 右辺第 2 項、出生率と死滅率の差  $\lambda_2(t)$  と時刻  $t$  における - 契約総数との積  $\lambda_2(t)\langle n(t) \rangle$  は追従者の寄与を表しているように見える。

しかし、厳密には (22) の右辺第 1 項を革新者の寄与、第 2 項を追従者の寄与とすることはできない。死滅率  $\mu(t)$  を移入によって生じた個体と出生過程によって生じた個体の双方に共通にとっているので、時刻  $t$  における契約数の変動に対する革新者の寄与には  $\lambda_0(t)$  以外に革新者が死滅する（契約解除する）寄与も含まれるからだ。

その寄与を調べるために、(22) と (24) において、 $\lambda(t) = 0$  として移入による個体数の変動を調べる。(22)、(24) と区別するために、平均個体数を  $\langle n_0(t) \rangle$  と表すことにすると、(22) と (24) より、

$$\begin{aligned}\frac{d\langle n_0(t) \rangle}{dt} &= \lambda_0(t) - \mu(t)\langle n_0(t) \rangle, \\ \langle n_0(t) \rangle &= \int_0^t d\tau \lambda_0(\tau) \exp\left[-\int_\tau^t \mu(t') dt'\right],\end{aligned}\quad (25)$$

となり、時刻  $t$  における個体数の変動に対する移入による個体の寄与は (25) 右辺のように表されることになる。

したがって、死滅率  $\mu(t) = 0$  の時のみ、移入率  $\lambda_0(t)$  は時刻  $t$  における契約数の変動に対する革新者の寄与を表し、 $\lambda_2(t)\langle n(t) \rangle = \lambda(t)\langle n(t) \rangle$  は追従者の寄与を表す。

### 3.1 修正 Bass モデル

(24) が解析的な関数で表される場合を考える。 $\xi$  を定数として、 $\lambda_0(t) = \xi \lambda_2(t)$  が成り立つ場合は、(24) は積分できる。さらに  $a, r, \mu$  を、 $a > 0, r > 0, \mu \geq 1$  を満たす定数であるとして、

$$\lambda_2(t) = \frac{\lambda_0(t)}{\xi} = ar\mu \frac{t^{\mu-1} e^{-rt^\mu}}{1 + ae^{-rt^\mu}}, \quad (26)$$

とすると、(22) と (23) は、それぞれ、次のように表される；

$$\langle n(t) \rangle = a\xi \frac{1 - e^{-rt^\mu}}{1 + ae^{-rt^\mu}}, \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \langle n(t) \rangle = a(1+a)r\xi\mu \frac{t^{\mu-1} e^{-rt^\mu}}{(1 + ae^{-rt^\mu})^2}. \quad (28)$$

(27), (28) において

$$r = p + q, \quad a = q/p, \quad \xi = (p/q)M, \quad (29)$$

とおき、 $\mu = 1$  とし、 $\langle n(t) \rangle$  を  $F(t)$  に置き換えると、(27), (28) は BASS モデルに一致する。そこで、(27), (28) を修正 Bass モデル (MBM) と呼ぶことにする [6]。  $\mu > 1$  のとき、(27), または (28) は Bass モデルよりも強い時間依存性を持っている。

### 3.2 確率論的普及モデル

移入率  $\lambda_0(t)$  と出生率  $\lambda_2(t)$  が、 $a_0, b_0, a_2, b_2$  を非負定数、 $r_0, r_2, \mu$  ( $\mu \geq 1$ ) を正定数として、

$$\lambda_0(t) = \frac{b_0 t^{\mu-1} e^{-r_0 t^\mu}}{1 + a_0 e^{-r_0 t^\mu}}, \quad \lambda_2(t) = \frac{b_2 t^{\mu-1} e^{-r_2 t^\mu}}{1 + a_2 e^{-r_2 t^\mu}}. \quad (30)$$

と表されるとする。(30) より、時刻  $t$  までの販売数は次の式で与えられる；

$$\langle n(t) \rangle = \int_0^t d\tau \frac{b_0 \tau^{\mu-1} e^{-r_0 \tau^\mu}}{1 + a_0 e^{-r_0 \tau^\mu}} \left( \frac{1 + a_2 e^{-r_2 \tau^\mu}}{1 + a_2 e^{-r_2 t^\mu}} \right)^\nu, \quad \nu = b_2/(a_2 r_2 \mu). \quad (31)$$

時刻  $t$  における単位時間当たりの商品販売数は (23) で与えられる。

$$\frac{d\langle n(t) \rangle}{dt} = \lambda_0(t) + \lambda_2(t)\langle n(t) \rangle. \quad (32)$$

(30), (31), (23) を確率的普及モデル (SDM) と呼ぶことにする [6].  $a_0 = a_2 = a$ ,  $r_0 = r_2 = r$ ,  $\nu = 1$  ( $b_2 = ar\mu$ ) および  $b_0/b_2 = \xi$  が成り立つとき, (31) は修正 Bass モデル (MBM), (28), に帰着する. (30) で定義される移入率と出生率は,  $\mu > 1$  のときともにピークを持つので, 係数の値によってはピークの位置がずれて, MBM よりもより幅の広い分布に対応する。

$\mu(t) = 0$  のとき, 時刻  $t$  における革新者の契約総数は次の式で与えられる;

$$\langle n_0(t) \rangle = \int_0^t d\tau \lambda_0(\tau) = \nu_0 \ln \left( \frac{1 + a_0}{1 + a_0 e^{-r_0 t \mu}} \right), \quad \nu_0 = b_0 / (a_0 r_0 \mu). \quad (33)$$

## 4 データ解析

修正 Bass モデル (MBM) と確率的普及モデル (SDM) を用いて, 1999 年 3 月～2008 年 12 月まで四半期毎のブロードバンド (BB) 契約数と, 1979 年から 2006 年までの 28 年間の年末における移動体通信 (MC) 契約数のデータを解析する。すべてのデータポイントを同等に扱うために, どのデータも誤差が 10% あるとして解析し, MBM と SDM のベストフィットを比較する。

BB 契約数の推移に対しては, MBM で解析した結果は,  $\mu = 1$ ,  $a = 390.8$ ,  $\xi = 6.581$ ,  $r = 1.241$  のとき,  $\chi^2_{\min}/n.d.f. = 45.53/(40 - 3) = 1.23$  であった。図 1 にその結果を示す。図中の  $\langle n \rangle$  は  $\mu = 0$  のときの革新者の寄与を表す。図 2 に縦軸を対数目盛にとったグラフを示す。

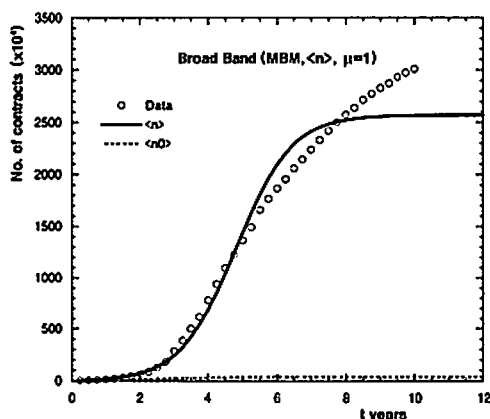


図 1 BB サービス契約数の MBM による解析結果。

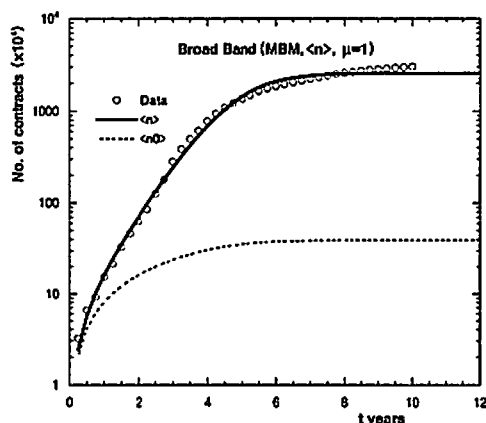


図 2 図 1 の縦軸を対数で目盛ったグラフ。

図 1 の結果を得たパラメータを使って, (28) を用いて時刻  $t$  における契約数の変動を計算した結果を図 3 に示す。さらに, その縦軸を対数で目盛ったグラフを図 4 に示す。

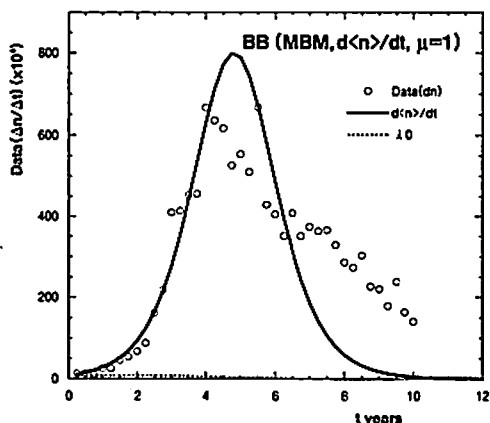


図 3 BB サービス契約数の MBM による解析結果。

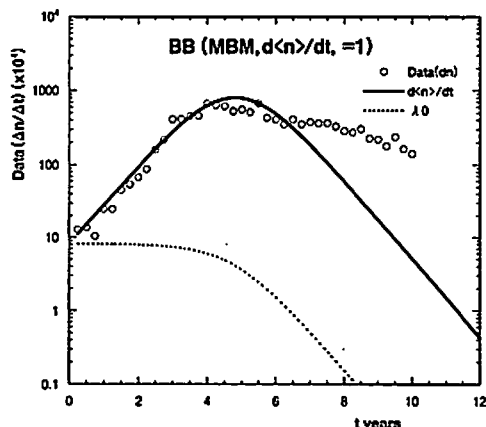


図 4 図 3 の縦軸を対数で目盛ったグラフ。

SDM では, 予め  $r_0 = r_2 = r$  において解析を行った。  $\mu = 1.1$ ,  $a = 0.00$ ,  $b_0 = 9.90$ ,  $a_2 = 10.83$ ,  $\nu = 2.60$ ,  $r = 0.586$  のときに  $\chi^2_{\min}/n.d.f. = 36.99/(40 - 6) = 1.09$  となり, 修正 Bass モデルよ



りもよい結果を得た。図5にその結果を示す。図6に縦軸を対数目盛にとったグラフを示す。

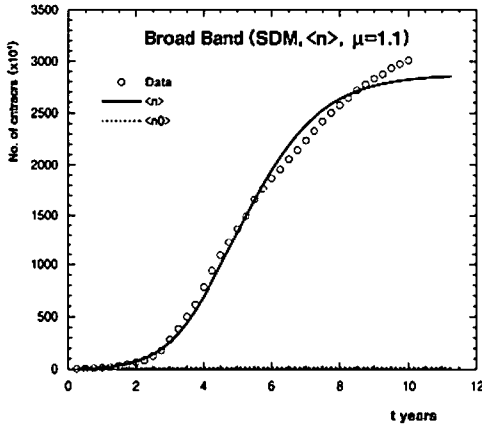


図5 BB サービス契約数のSDMによる解析結果..

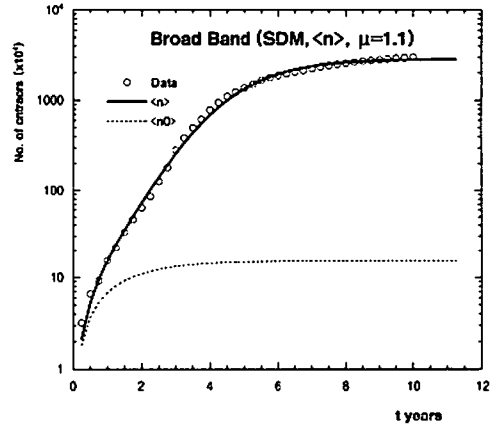


図6 図5の縦軸を対数で目盛ったグラフ.

図5の結果を得たパラメータを使って、(30), (31), (33) を用いて時刻  $t$  における契約数の変動を計算した結果を図7に示す。さらに、その縦軸を対数で目盛ったグラフを図8に示す。

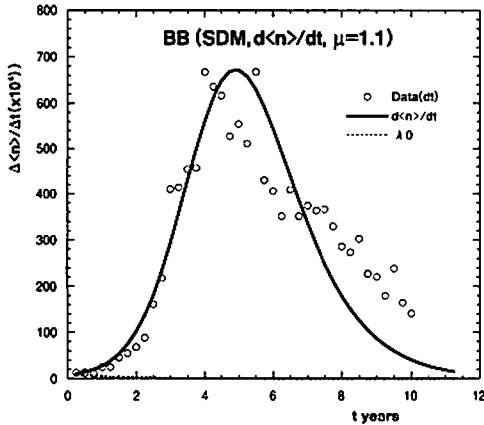


図7 時刻  $t$  における BB サービス契約数の変動.

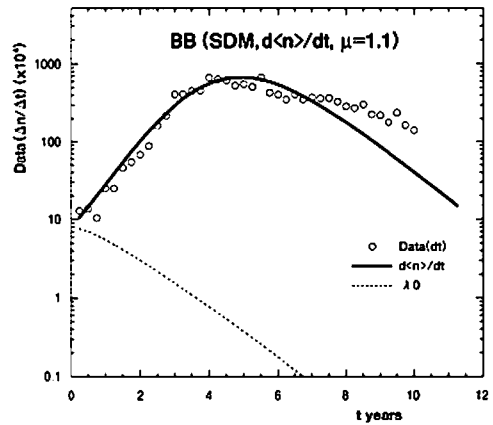


図8 図5の縦軸を対数で目盛ったグラフ.

図3と図7(図4と図8)を比較すると、SDMの方がMBMよりも分布の幅が広がり、時刻  $t$  におけるブロードバンド契約数の変動のデータの分布がピークを迎えた後も、SDMによる結果とデータとの差はMBMによる結果とデータとの差よりも小さくなっていることがわかる。

移動体通信のデータに対しては、MBMでは、 $\mu = 1.6$ ,  $a = 4.775 \times 10^3$ ,  $\xi = 2.013$ ,  $r = 0.0667$  のとき、 $\chi^2_{min}/n.d.f. = 107.13/(28-4) = 4.46$  であった。図9にその結果を示す。図中の  $\langle n_0 \rangle$  は  $\mu = 0$  のときの革新者の寄与を表す。図10に縦軸を対数目盛にとったグラフを示す。

図1の結果を得たパラメータを使って、(refeq.mbm3)から、時刻  $t$  における契約数の変動を計算したものを示す。

SDMで解析した結果は、 $\mu = 1.6$ ,  $a = 1121$ ,  $b_0 = 246.0$ ,  $a_2 = 79378$ ,  $\nu = 0.743$ ,  $r = 0.0885$  のときに  $\chi^2_{min}/n.d.f. = 99.267/(28-6) = 4.51$  となり、修正 Bass モデルの結果を改善することはできなかった。

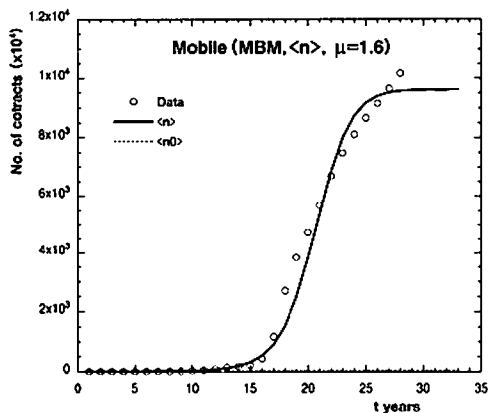


図 9 移動体通信サービス契約数の MBM による解析結果.

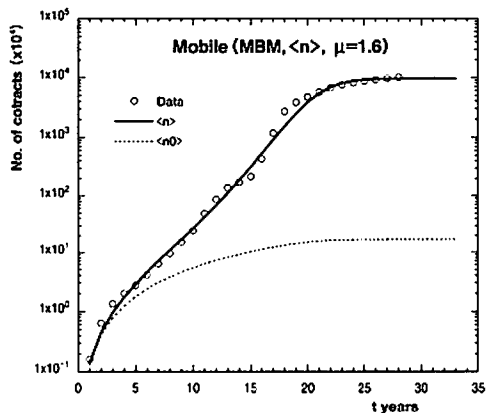


図 10 図 9 の縦軸を対数で目盛ったグラフ.

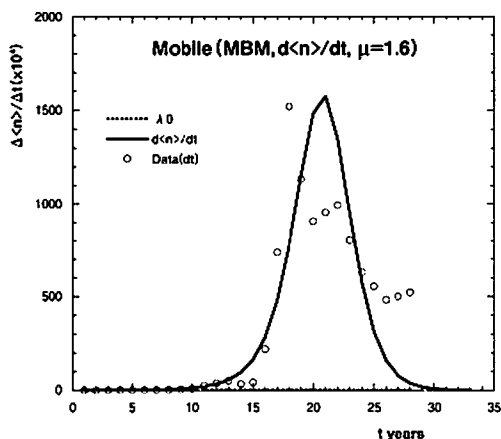


図 11 BB サービス契約数の MBM による解析結果.

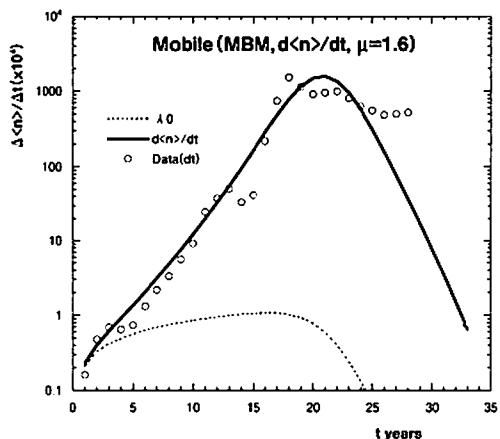


図 12 図 11 の縦軸を対数で目盛ったグラフ.

## 5 おわりに

文献 [5] では移入のある一般化された出生過程に基づいた普及モデルを定式化し、BASS モデルとの関係を議論したが、そこには契約解除の可能性は含まれていない。契約解除は確率過程においては死滅過程に対応すると考えられる。

そこで、本稿では、移入のある一般化された出生死滅過程に基づいた普及モデルを定式化した。ただし、移入によって生じた個体（革新者に対応）と出生過程によって生じた個体（追従者に対応）のいずれも同じ死滅率になると仮定した。

そうすることによって、普及モデルとしては、(22) に示すように、左辺の時刻  $t$  における個体数の変化（例えば、契約数に対応）は右辺第 1 項の個体数に直接依存しない移入率  $\lambda_0(t)$  で表される項と、右辺第 2 項の出生率と死滅率の差、 $\lambda(t) - \mu(t)$ 、に時刻  $t$  における個体総数をかけた項、すなわちその属性を持った個体数に比例した項、の和で表されることになる。したがって、形式的に

は、右辺第2項は死滅率を含まない以前の出生率  $\lambda_2(t)$  を実効的な出生率  $\lambda(t) - \mu(t)$  で置き換えたものになる。

以上より、契約解除を含むようなプロセスに対しても以前の修正 BASS モデルや確率論的普及モデルを使うことができることになり、それらを用いてブロードバンド契約数の推移と移動通信契約数の推移のデータを解析した。

ブロードバンド契約数の推移の解析では、 $\mu > 1$  の修正 BASS モデルよりも BASS モデル ( $\mu = 1$ ) の方がデータと適合性がよい。しかし、 $\mu = 1.1$  とした SDM の方がさらにデータとの適合性がよくなっている。

移動体通信契約数の推移の解析では、 $\mu = 1.6$  とした修正 BASS モデルの適合性が最も高い。データは BASS モデル ( $\mu = 1$ ) よりも強い時間依存性を持っていることになる。

確率過程を導入して普及モデルを定式化することにより、BASS モデルを修正 BASS モデル、確率論的普及モデルへと一般化できるだけでなく、契約解除の例で示されるような個体数が減少する場合にも、モデルを拡張することが可能になる。

## 参考文献

- [1] Everett M. Rogers, *Diffusion of Innovations*, 3rd ed.,(1983), New York: The Free Press.
- [2] F. M. Bass, A New Product Growth Model for Consumer Durables, *Management Science*, 15, 215(1969).
- [3] F. M. Bass, T. V. Krishnan and D. C. Jain, Why the Bass Model Fits without Decision Variables, *Marketing Science*, Vol.13, 203(1994).
- [4] D. G. Kendall, On the generalized birth-and-death process, *Ann. Math. Statist.*, 19, 1(1948).
- [5] 鈴木尚通, 成香政, 葛西和宏, 田中正敏, 消費者の購買行動における意志決定とその理論的応用, 松本大学研究紀要第6号, 45(2008).
- [6] N. Suzuki, M. Tanaka, K. Kasai and K.J. Sung, A stochastic approach to diffusion model with asymmetric influence, *Proceeding of the third world conference on production and operation management -POM TOKYO 2008-*, 2727(2008).